Esercizi di Analisi Matematica B

Massimo Cicognani

Indice

Questa è una selezione di alcuni esercizi e compiti d'esame collegati ai corsi di Analisi Matematica LB tenuti dall'autore presso la Facoltà di Ingegneria II dell'Università di Bologna, sede di Cesena.
Vengono prima proposti tutti i testi, poi, nel capitolo successivo, vengono date tutte le soluzioni. Per comodità del lettore, prima di ciascuna soluzione viene riproposto il testo completo.
Gli argomenti proposti sono: serie numeriche e serie di potenze, calcolo differenziale per funzioni di più variabili, equazioni differenziali, integrali multipli, integrali curvilinei. Nel primo capitolo, alla fine di ogni sezione riguardante uno di questi argomenti, si propongono alcuni titoli di brevi relazioni che il lettore è invitato a scrivere. Si tratta di quesiti che possono essere inseriti nelle prove scritte d'esame ma la loro principale utilità consiste in una traccia per rielaborare i contenuti del corso in maniera organica durante lo studio personale. Per la loro redazione, il lettore può consultare il testo Lezioni di Analisi Matematica B dello stesso autore, che illustra in quale maniera gli argomenti sono sviluppati durante i corsi, e/o, ovviamente, un qualunque manuale di Analisi Matematica.

Capitolo 1

Testi

1.1 Serie numeriche e serie di potenze

Esercizio 1.1.1 Verificare che la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log \frac{k+1}{k}$$

è divergente, dopo aver calcolato la somma S_n dei primi n termini.

Esercizio 1.1.2 Provare che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log \frac{(k+1)^2}{k(k+2)} = \log 2.$$

Esercizio 1.1.3 Nei due esercizi precedenti il termine generale tende a 0 per $k \to +\infty$, quindi in entrambi è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza di una serie. Cosa mostra, in particolare, il primo esercizio?

Esercizio 1.1.4 Provare che per $|x| < 1$ vale

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{6^n}\right) x^n = \frac{12 - 5x}{6 - 5x - x^2}.$$

Esercizio 1.1.5 Determinare per $|x| < 1$ il valore a cui converge

$$\sum_{n=m}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{6^n}\right) x^n$$

con $m \geq 1$.

Esercizio 1.1.6 Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^{\alpha} n}, \quad \alpha > 0.$$

Esercizio 1.1.7 Utilizzando il criterio del confronto, determinare il carattere delle seguenti serie a termini positivi

$$(a)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + \sin n}{3^n}, \quad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 - \cos n}{n^2}, \quad (c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 - \cos n}{n}.$$

Esercizio 1.1.8 Utilizzando il criterio del confronto, determinare il carattere della serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^{\alpha}}, \quad \alpha > 0.$$

Esercizio 1.1.9 Utilizzando il criterio del confronto in forma asintotica, determinare il carattere della serie a termini positivi

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^3}, \quad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \log n}{n^2 + \cos n} \quad (c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}$$

$$(d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{(n+1)^3}\right), \quad (e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right).$$

Esercizio 1.1.10 Utilizzando il criterio del confronto in forma asintotica, determinare, al variare di α in $\mathbf{R}_+$, il carattere della serie a termini positivi

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right), \quad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Esercizio 1.1.11 Utilizzando il criterio del rapporto, determinare il carattere della serie a termini positivi

$$(a)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{3^n}, \quad (b)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$
$$(c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}, \quad (d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

Esercizio 1.1.12 Utilizzando il criterio della radice, determinare, al variare di α in $\mathbf{R}$ e di a in $\mathbf{R}_+$, il carattere della serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha a^n.$$

Esercizio 1.1.13 Studiare, al variare di α in $\mathbf{R}$, la convergenza semplice e assoluta della serie a termini reali

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}.$$

Esercizio 1.1.14 Studiare la convergenza semplice e assoluta delle serie a termini complessi

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-1)^n + in}, \quad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{i+(-1)^n n}, \quad (c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-1)^n + in^2}.$$

Esercizio 1.1.15 Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze in campo complesso

$$(a)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2^n}{n^2+1} z^n, \quad (b)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n+1} z^n,$$
$$(c)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^n, \quad (d)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^{1/n}-1)^2}{1-\cos 1/n} z^n.$$

Esercizio 1.1.16 Determinare il comportamento delle serie di potenze di variabile reale

$$(a)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n+1} x^n, \quad (b)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n$$

negli estremi dell'intervallo di convergenza.

Esercizio 1.1.17 Utilizzando i due esercizi precedenti, trovare il dominio D delle seguenti funzioni di variabile reale

$$(a)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n+1} \left(\frac{x+1}{|x|}\right)^n, \quad (b)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (x^2-1)^n.$$

Domande di teoria

A) Dare la definizione di serie a termini reali ed enunciare la condizione necessaria di convergenza.
B) Serie geometrica e suoi resti: comportamento e valore della somma.
C) Specificare i possibili caratteri di una serie a termini positivi, enunciare il criterio dell'integrale e dedurne il comportamento della serie armonica generalizzata.
D) Enunciare e dimostrare il criterio del confronto ed il suo corollario di confronto asintotico per serie a termini positivi.
E) Enunciare i criteri del rapporto e della radice per serie a termini positivi. Fare esempi in cui i criteri risultano inefficaci.
F) Enunciare il criterio di Leibniz per serie con termini a segno alterno.
G) Definire il concetto di convergenza assoluta di una serie e discutere le relazioni con la semplice convergenza.

H) Dimostrare che la parte interna dell'insieme di convergenza di una serie di potenze in campo complesso è vuota oppure un cerchio aperto oppure l'intero piano. Definire di conseguenza il raggio di convergenza di una serie di potenze.
I) Discutere la derivabilità nei punti interni e la continuità negli estremi dell'intervallo di convergenza per la funzione somma di una serie di potenze di variabile reale.
J) Definire la serie di Taylor di una funzione C^∞ di variabile reale. Dimostrare che le funzioni reali e^x, $\sin x$, $\cos x$ sono sviluppabili in serie di Mc Laurin su tutto l'asse reale.
K) Definire le funzioni e^z, $\sin z$, $\cos z$ in campo complesso e spiegare come si giunge alla formula di Eulero.

1.2 Funzioni di più variabili reali

Esercizio 1.2.1 Provare che non esistono i limiti

$$(a) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad (b) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{y}$$

Esercizio 1.2.2 Siano $\alpha, \beta > 0$. Utilizzando le coordinate polari provare che esiste il limite (e vale 0)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^2+y^2}$$

se e solo se $\alpha + \beta > 2$.

Esercizio 1.2.3 Calcolare

$$(a) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^6}, \quad (b) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(xy)}{x^2+y^4}$$

[(a) Utilizzare le coordinate polari e la disuguaglianza $\cos^2\theta \leq \cos^2\theta + \varrho^4 \sin^6\theta$.

Esercizio 1.2.4 Seguendo la definizione di derivata direzionale, calcolare $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,0)$ con $f(x,y) = x^3 + y^2 - xy$ e $v = (v_1, v_2)$ un versore di $\mathbf{R}^2$.

Esercizio 1.2.5 Perchè non esiste $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ tale che $f_x = 2xy$ e $f_y = -x^2$?

Esercizio 1.2.6 Provare che le seguenti funzioni sono continue ma non differenziabili in $(0,0)$

$$(a)\ f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (b)\ f(x,y) = \sqrt{|xy|}$$

Esercizio 1.2.7 Siano $\alpha, \beta > 0$. Provare che la funzione definita da

$$f(x,y) = \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^2 + y^2} \text{ se } (x,y) \neq (0,0),\ f(0,0) = 0$$

è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha + \beta > 2$ e differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha + \beta > 3$.

Esercizio 1.2.8 Provare che la funzione definita da

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \text{ se } (x,y) \neq (0,0),\ f(0,0) = 0$$

non è continua in $(0,0)$ ma ammette in tale punto tutte le derivate direzionali.

Esercizio 1.2.9 Con riferimento all'esercizio precedente, discutere la validità della regola $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0) = (\nabla f(0,0), v)$ con v direzione diversa dai versori degli assi.
Ci sono almeno due condizioni necessarie per la differenziabilità che non sono soddisfatte da f in $(0,0)$: quali?

Esercizio 1.2.10 Sempre con riferimento alla stessa funzione di cui sopra, senza applicare la definizione, per quale risultato f è differenziabile in $(1,0)$? Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico nel punto $(1,0,f(1,0))$.

Esercizio 1.2.11 Studiare la continuità, derivabilità e differenziabilità in $(0,0)$ della funzione definita da

$$f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2} \text{ se } (x,y) \neq (0,0),\ f(0,0) = 0.$$

Esercizio 1.2.12 Siano $\alpha, \beta > 0$. Studiare la continuità, derivabilità e differenziabilità in $(0,0)$ della funzione definita da

$$f(x,y) = \frac{|x|^\alpha + |y|^{3-\beta}}{(\sqrt{x^2+y^2})^\beta} \text{ se } (x,y) \neq (0,0),\ f(0,0) = 0$$

Esercizio 1.2.13 Utilizzando la regola della catena, provare che la parabola di equazioni parametriche

$$x = 3t^2, y = 2t$$

è una linea di livello della funzione

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}.$$

Esercizio 1.2.14 Determinare i punti di massimo e minimo relativo della funzione

$$g(t) = f(t,t)$$

con

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

dopo aver calcolato $g'(t)$ con la regola della catena.

Esercizio 1.2.15 Classificare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = x^3(x^2+y^2-1).$$

Esercizio 1.2.16 Classificare i punti critici delle funzioni

$$(a)\ f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2-4xz-2yz-2z^3/3$$
$$(b)\ f(x,y,z) = x^2+y^2+10z^2-4xz-2yz-2x^3/3.$$

Esercizio 1.2.17 Col metodo dei moltiplicatori di Lagrange, trovare la distanza dall'origine della retta intersezione dei piani $x-y+z=1$ e $x+y-z=0$.

Esercizio 1.2.18 Sia $f : A \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$,

$$A = \{(x,y,z)|\ x^2+y^2-z^2 \leq 0, -2 \leq z \leq 0\}, \quad f(x,y,z) = x^2+y+2z.$$

Determinare l'immagine $f(A)$.

Esercizio 1.2.19 Sia $f : A \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$,

$$A = \{(x,y,z)|\ x^2+y^2+z^2 \leq 4, |z| \geq 1\}, \quad f(x,y,z) = \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}y^2 + z.$$

Determinare l'immagine $f(A)$.

Domande di teoria

A) Insiemi compatti, insiemi connessi e principali proprietà delle funzioni continue in $\mathbf{R}^n$.
B) Derivate direzionali e loro significato geometrico.
C) Definizione di differenziabilità in un punto. Relazioni con la continuità.
D) Relazioni tra derivabilità e differenziabilità.
E) Teorema del differenziale totale.
F) Regola della catena e sue conseguenze.
G) Matrice jacobiana, invertibilità locale.
H) Teorema di Schwarz, matrice hessiana.
I) Formula di Taylor al secondo ordine.
J) Classificazione dei punti critici attraverso la matrice hessiana.
K) Teorema delle funzioni implicite.
L) Massimi e minimi vincolati, metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

1.3 Equazioni differenziali

Esercizio 1.3.1 Risolvere l'equazione differenziale lineare

$$y' = \frac{x}{x^2+1}y.$$

Esercizio 1.3.2 Risolvere il problema

$$y' = -\frac{2}{x}y + \frac{\sin 4x}{x^2},\ y(-\pi/8) = 0.$$

Esercizio 1.3.3 Risolvere il problema

$$y'' = \frac{y'}{x} + x\cos x,\ y(\pi/2) = 1,\ y'(\pi/2) = \pi/2.$$

Esercizio 1.3.4 Risolvere il problema

$$y' = \frac{2y}{x} + 2x\sqrt{y},\ y(-1) = 1.$$

Esercizio 1.3.5 Risolvere il problema

$$y' = \frac{3(y^2+1)}{xy},\ y(-1) = -2.$$

Esercizio 1.3.6 Dopo aver detto, senza fare calcoli, perchè la soluzione è una funzione strettamente crescente nel proprio intervallo di definizione, risolvere il problema

$$y' = \frac{e^y}{x},\ y(1) = 0.$$

Esercizio 1.3.7 Risolvere il problema

$$y' = \frac{y(y-2)}{x(x-4)},\ y(2) = 1.$$

Esercizio 1.3.8 Risolvere l'equazione

$$y' = x(y^3 - y).$$

Esercizio 1.3.9 Calcolare $\int_0^2 y(x)dx$ con y la soluzione di

$$y' = \frac{y\log y}{x},\ y(1) = 1/2.$$

Esercizio 1.3.10 Calcolare $\int_{-1}^0 y(x)dx$ con y la soluzione di

$$y' = \frac{y^2 + y}{x},\ y(-1) = 1.$$

Esercizio 1.3.11 Risolvere il problema

$$y' = \frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x},\ y(2) = \pi/3.$$

Esercizio 1.3.12 Risolvere le equazioni

$$(a)\ y'' - 5y' + 6y = e^x, \quad (b)\ y'' - 2y' + y = e^{2x}.$$

Esercizio 1.3.13 Risolvere l'equazione

$$y'' + y = \cos x.$$

Esercizio 1.3.14 Risolvere il problema

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x} + 12x - 8,\ y(0) = 1, y'(0) = 3.$$

Esercizio 1.3.15 Risolvere l'equazione

$$y'' + 2y' + 3y = e^{-x} \cos x.$$

Esercizio 1.3.16 Sia $k \in \mathbf{R}$. Risolvere l'equazione

$$y'' + ky = 0$$

e tra le soluzioni trovare quelle che verificano le condizioni ai limiti

$$y(0) = y(\pi) = 0.$$

Esercizio 1.3.17 Risolvere il problema

$$y'' - 2y' + y = t^{-2}e^t,\ y(1) = 0, y'(1) = -e.$$

Domande di teoria

A) Equazioni differenziali del primo ordine, problema di Cauchy. Teorema fondamentale di esistenza e unicità della soluzione.
B) Dare un esempio di non unicità della soluzione di un problema di Cauchy.
C) Equazioni lineari del primo ordine. Formula risolutiva.
D) Equazioni a variabili separabili ed equazioni ad esse riconducibili.
E) Equazioni differenziali lineari omogenee: spazio vettoriale delle soluzioni, matrice wronskiana.
F) Equazioni differenziali lineari non omogenee: spazio affine delle soluzioni, metodo della variazione delle costanti.
G) Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti.
H) Metodi per simpatia. Risonanza nell'equazione dell'oscillatore armonico.

1.4 Integrali multipli

Esercizio 1.4.1 Calcolare

$$\int_A \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy, \quad A = \{x^2+y^2 \le 4, 0 \le y \le x, 1 \le x\}.$$

Esercizio 1.4.2 Dato il settore circolare

$$A = \{x^2+y^2 \le 2, 0 \le y \le x\}$$

a) Calcolarne il baricentro geometrico.
b) Calcolare il volume del solido da esso generato con una rotazione completa attorno all'asse y senza utilizzare il Teorema di Guldino.
c) Verificare che il Teorema di Guldino è soddisfatto.

Esercizio 1.4.3 Si consideri la sfera euclidea S e la sua parte A

$$S = \{x^2+y^2+z^2 \le 4\}, \quad A = \{x^2+y^2+z^2 \le 4,\ 4z^2 \le x^2+y^2+z^2\}.$$

Calcolare il rapporto tra il volume di A e l'integrale

$$\int_S (x^2+y^2+z^2)^{1/2} dxdydz.$$

Esercizio 1.4.4 Siano $\alpha > -2$, $R > 0$. Posto

$$A_R = \{0 \le z \le R^2 - x^2 - y^2\}, \quad \mu_3(A_R) = \text{ volume di } A_R,$$

calcolare

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{1}{R^3\mu_3(A_R)} \int_{A_R} (x^2+y^2)^{\alpha/2} dxdydz.$$

Esercizio 1.4.5 Calcolare la misura (volume) di $A \subset \mathbf{R}^3$

$$A = \{\frac{3}{2}(x^2+y^2) - 1 \le z \le 1 - \frac{1}{2}(x^2+y^2), z \ge 0\}.$$

Esercizio 1.4.6 Calcolare $\int_A \frac{e^{z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdydz$ con

$$A = \{\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1\}.$$

Esercizio 1.4.7 Calcolare la misura (volume) di $A \subset \mathbf{R}^3$

$$A = \{0 \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2},\ z \leq -x^2 - y^2 + 2\sqrt{x^2+y^2}\}.$$

• Nei due esercizi seguenti calcolare $\int_A f(x,y,z) dxdydz$ con le formule di riduzione.

Esercizio 1.4.8

$$A = \{x + y \leq \sqrt{z}, x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 1\}, \quad f = x$$

Esercizio 1.4.9

$$A = \{-1 \leq x \leq 0, y \geq 0, x + y \leq 1, 0 < z \leq x^2\}, \quad f = 1/2\sqrt{z}$$

• Nei rimanenti esercizi calcolare $\int_A f(x,y,z) dxdydz$ passando in coordinate cilindriche o sferiche dopo aver determinato quale dei due cambi di variabile è il più idoneo.

Esercizio 1.4.10

$$A = \{0 \leq z \leq 1, y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq (z^2+1)^2\}, \quad f = \frac{-z}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

Esercizio 1.4.11

$$A = \{0 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq \sqrt{(x^2+y^2+z^2)/2}\}, \quad f = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Esercizio 1.4.12

$$A = \{0 \le z \le 1/2, 4z^2 \le x^2 + y^2 \le (z^2+1)^2\}, \quad f = \frac{1}{(z-1)^3(x^2+y^2)^{1/2}}.$$

Esercizio 1.4.13

$$A = \{0 < x^2 + y^2 + z^2 \le 1, \frac{2}{\sqrt{3}}z \ge \sqrt{x^2+y^2+z^2}\}, \quad f = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Esercizio 1.4.14

$$A = \{0 \le z \le 1, x \ge 0, y \ge 0, z^2 \le x^2 + y^2 \le z\}, \quad f = \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Esercizio 1.4.15

$$A = \{0 < x^2 + y^2 + z^2 \le 1, \sqrt{x^2+y^2+z^2} \le 2z \le \sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}\},$$

$$f = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Esercizio 1.4.16

$$A = \{0 < z \le 1 - x^2 - y^2\}, \quad f = \frac{1}{2\sqrt{z}}.$$

Esercizio 1.4.17

$$A = \{0 < x^2 + y^2 + z^2 \le 1, z \le \sqrt{(x^2+y^2+z^2)/2}\}, \quad f = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Domande di teoria

A) Definizione di integrale per funzioni positive, condizioni sufficienti per l'integrabilità.
B) Definizione di funzione sommabile, casi notevoli di sommabilità.
C) Principali proprietà dell'integrale per funzioni sommabili rispetto alle operazioni, alla relazione d'ordine, alle suddivisione dell'insieme di definizione, alle simmetrie.
D) Formule di riduzione.
E) Cambiamenti di variabile, coordinate polari, cilindriche, sferiche.
F) Utilizzo delle coordinate polari e delle coordinate sferiche per discutere la sommabilità di $1/\|x\|^\alpha$ in dimensioni 2 e 3.
G) Calcolo di $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$.

1.5 Integrali curvilinei

Esercizio 1.5.1 Data la curva γ in $\mathbf{R}^3$parametrizzata da

$$r(t) = (\cos t, \sin t, t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

determinare:
a) la retta tangente nel punto $r(\pi)$;
b) la sua lunghezza;
c) il baricentro geometrico;
d) il baricentro rispetto alla densità lineare $f(x, y, z) = |x|$;
e) l'integrale su γ, orientata in senso contrario a quello indotto dalla parametrizzazione data, del campo vettoriale $F(x, y, z) = (y, -x, x + z)$.

Esercizio 1.5.2 Determinare l' integrale di lavoro $\displaystyle\int_\gamma F \cdot dr$ del campo

$$F(x, y) = e^{\sin x}(y \cos x, 1) + (1, 1)$$

sulla curva orientata γ parametrizzata da $r(t) = (\cos(\pi t), t + t^2)$, $0 \leq t \leq 1$.

Esercizio 1.5.3 Sia F il campo vettoriale in $\mathbf{R}^3$

$$F(x, y, z) = \left(e^y + ze^x, xe^y + \frac{e^y}{z^2 + 1}, e^x - \frac{2ze^y}{(z^2 + 1)^2}\right).$$

a) Provare che F è chiuso in $\mathbf{R}^3$.
b) Determinare il lavoro di F sulla curva orientata parametrizzata da

$$r(t) = (t, t^2, 1), \quad 0 \le t \le 1.$$

Esercizio 1.5.4 Sia F il campo vettoriale in $\mathbf{R}^3$

$$F(x, y, z) = \left(-y, x, z^2\right).$$

Determinare il lavoro di F sulla curva orientata definita da

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \; y = x, \; x \ge 0$$

con punto iniziale $(0, 0, 1)$.

Esercizio 1.5.5 Dato il campo piano

$$F(x, y) = \left(\frac{3\log(1+y^2)}{2\sqrt{x}}, \frac{6y\sqrt{x}}{1+y^2}\right)$$

a) Provare che è esatto su tutto il dominio naturale determinando i potenziali.
b) Trovare il potenziale $U(x, y)$ che verifica $U(1, -1) = 0$.
c) Relativamente al potenziale determinato in b), esplicitare nella forma $y = y(x)$ la linea di potenziale nullo che passa dal punto $(1, -1)$

• Nei seguenti cinque esercizi data la curva γ, contenuta nell'insieme $A \subset \mathbf{R}^3$, attraverso equazioni cartesiane, determinare equazioni parametriche e calcolare l'integrale su γ della funzione scalare f assegnata.

Esercizio 1.5.6

$$\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ \\ z = y \end{cases}, \quad \gamma \subset A = \{x \ge 0, y \ge 0\}, \quad f = -2xy.$$

Esercizio 1.5.7

$$\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ \\ z = x + y \end{cases} , \quad \gamma \subset A = \{x \geq 0, 0 \leq y \leq x\}, \quad f = -2(x^2 - y^2).$$

Esercizio 1.5.8

$$\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ \\ x^2 + y^2 = z \end{cases} , \quad \gamma \subset A = \{y \geq 0\}, \quad f = x + y.$$

Esercizio 1.5.9

$$\gamma : \begin{cases} y = x \\ \\ z = x^2 + y^2 \end{cases} , \quad \gamma \subset A = \{0 \leq x \leq 1\}, \quad f = x + y.$$

Esercizio 1.5.10

$$\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ \\ x + y = 0 \end{cases} , \quad \gamma \subset A = \{y \geq 0, z \geq 0\}, \quad f = z.$$

• Nei seguenti sei esercizi dato il campo F nel suo dominio naturale, verificare che il campo è chiuso, dire se il dominio è stellato o, nel caso bidimensionale, semplicemente connesso. Trarre le conseguenze sulla esistenza di potenziali locali o globali. Determinare per i campi chiusi dei potenziali locali e verificare poi si possono estendere all'intero dominio (ciò può accadere anche se il dominio non è stellato: questa condizione è sufficiente ma non necessaria!).

Esercizio 1.5.11

$$F(x, y) = \left(\frac{-1}{2\sqrt{y - x}} + ye^x, \frac{1}{2\sqrt{y - x}} + e^x + 2y \right).$$

Esercizio 1.5.12

$$F(x,y) = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2-y}} + e^y + 2x, \frac{-1}{2\sqrt{x^2-y}} + xe^y \right).$$

Esercizio 1.5.13

$$F(x,y) = \left(\frac{1}{x+y} + 2x, \frac{1}{x+y} + \frac{2y}{y^2+1} \right).$$

Esercizio 1.5.14

$$F(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2} + 2x, \frac{2y}{x^2+y^2} + 1 \right)$$

Esercizio 1.5.15

$F(x,y,z) =$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + 2yz, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + y^2 + \frac{1}{z^2+1} \right)$$

Esercizio 1.5.16

$$\left(\frac{-z}{x^2+z^2}, 2y, \frac{x}{x^2+z^2} \right)$$

Domande di teoria

A) Definizione di curva e di curva orientata.
B) Definizione di curve regolari e regolari a tratti. Retta tangente.
C) Lunghezza di una curva.
D) Integrali curvilinei di funzioni scalari. Baricentro.
E) Definizione di integrale curvilineo di un campo vettoriale, dipendenza dall'orientamento.
F) Integrale di un campo dotato di potenziale (campo esatto).
G) Relazioni tra integrali curvilinei ed esistenza di potenziali. (Campi conservativi e campi esatti).
H) Definizione di campo chiuso. Dimostrare che un campo esatto è chiuso.
I) Dare un esempio di un campo chiuso che non è esatto.
J) Condizioni geometriche sul dominio per assicurare che un campo chiuso sia esatto (in tale dominio).
K) Determinazione di un potenziale su un rettangolo di un campo piano chiuso.

1.6 Compiti

Compito 1.6.1

Esercizio A
• Determinare l'insieme di convergenza in $\mathbf{R}$ della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n+1} t^n, \qquad t \in \mathbf{R}$$

(Solo il risultato, **1.5 pt**).

• Determinare il dominio naturale D della funzione di variabile reale

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n+1} \left(\frac{x}{|x-1|} \right)^n$$

(Solo il risultato, **3 pt**).

• la funzione $f(x)$ è continua per $x = -1/2$? Motivare la risposta (**1.5 pt**).

Esercizio B
Sia $f : A \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$,

$$A = \{(x, y, z) |\ 4x^2 + 4y^2 - z^2 \leq 0, -4 \leq z \leq 0\}, \quad f(x, y, z) = x + y^2 + z.$$

Determinare i seguenti elementi:

• Eventuali punti di massimo o minimo interni al dominio A (motivare la risposta, **0.5 pt**).

• Eventuali punti di frontiera dove il teorema dei moltiplicatori di Lagrange non si può applicare (solo il risultato, **0.5 pt**).

• Le tre regioni di frontiera V_1, V_2, V_3 in cui il teorema dei moltiplicatori di Lagrange si applica (scrivere le equazioni e le disequazioni che definiscono le regioni, **1 pt**.

• I tre corrispondenti sistemi da risolvere (scrivere le equazioni dei sistemi di Lagrange, **1 pt**).

• I tre corrispondenti insiemi di punti che si ottengono (scrivere gli insiemi delle soluzioni dei tre sistemi precedenti, **2 pt**).

• Perchè l'insieme dei valori $f(A)$ è un intervallo limitato e chiuso? (**0.5 pt**)

• Scrivere $f(A)$. (**0.5 pt**)

Esercizio C
Determinare la soluzione di

$$y' = \frac{y^2+2y}{x}, \; y(-1) = 2$$

specificandone il dominio. (Svolgimento completo riportando i passaggi significativi. **6 pt**)

Esercizio D
Dato l'integrale

$$\int_A \frac{y}{(z-1)^2(x^2+y^2)} dxdydz,$$

$$A = \{0 \leq z < 1, y \geq 0, 4z^2 \leq x^2+y^2 \leq (z^2+1)^2\},$$

passare a coordinate cilindriche.

• Si ottiene (completare, **1 pt**):

$$\int_{\cdots}^{\cdots} \cdots\cdots \left(\int_B \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots d\varrho dz \right) d\theta,$$

$$B = \{(\varrho, z); \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\}.$$

• Riportare da questo punto i passaggi significativi fino ad arrivare al risultato finale (**4 pt**).

Esercizio E
Data la curva γ di equazioni cartesiane

$$\gamma : \begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ \\ z = x \end{cases}, \quad \gamma \subset A = \{x \geq 0, y \geq 0\}$$

• Scrivere una parametrizzazione (solo il risultato, **2 pt**).

• Calcolare $\displaystyle\int_\gamma 2xyds$ (riportare i passaggi significativi, **3 pt**)

Esercizio F
Dimostrare che l'integrale lungo una curva regolare orientata di un campo esatto vale la differenza di potenziale agli estremi. (**5 pt**)

Compito 1.6.2

Esercizio A

• Determinare l'insieme di convergenza in $\mathbf{R}$ della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^n}{2^n+1} t^n, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

(Solo il risultato, **2 pt**).

• Determinare il dominio naturale D della funzione di variabile reale

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^n}{2^n+1} \left(\frac{x}{x-1}\right)^n$$

(Solo il risultato, **2 pt**).

• Determinare $f'(0)$ motivando la risposta (**2 pt**).

Esercizio B

Sia

$$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R},\ f(x,y) = x^3(x^2+y^2-2y).$$

Nello studio dei punti di minimo/massimo locali, determinare i seguenti elementi:

• Punti critici. (Solo risultato, **2 pt**)

• Classificazione dei punti critici dove la matrice hessiana consente di concludere. Per ciascuno di questi punti, riportare la corrispondente matrice hessiana e motivare conseguentemente la classificazione del punto (**2 pt**)

• Nei rimanenti punti critici la funzione vale 0. Riportare su un grafico i segni dei valori di f e trarre conclusioni motivate sulla natura di questi punti. (**2 pt**)

Esercizio C

Data l'equazione

$$y'' - 4y' + 4y = e^{-2x} + e^{2x}$$

determinare i seguenti elementi:

• Integrale generale della equazione omogenea corrispondente (solo il risultato, **1 pt**).

• Un integrale particolare riportando tutti i passaggi significativi (**3 pt**).

• Integrale generale della equazione completa (solo il risultato, **1 pt**).

• Soluzione con dati iniziali $y(0) = y'(0) = 0$ (solo il risultato, **1 pt**).

Esercizio D
Calcolare, riportando i passaggi significativi, $\int_A \frac{e^{z^2}}{(x^2+y^2)^{1/4}} dxdydz$ con $A = \{(x^2+y^2)^{3/4} \leq z \leq 1\}$. (**5 pt**).

Esrcizio E
Dato il campo vettoriale piano

$$F(x,y) = \left(\frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}, \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \right)$$

determinare i seguenti elementi:

• Il dominio naturale A specificando se è semplicemente connesso (solo il risultato, **1 pt**).

• Il campo F è chiuso in A? Indicare le derivate delle componenti che servono per rispondere (solo il risultato, **1 pt**).

• Il campo F è esatto in A? In caso affermativo, indicare i potenziali (solo il risultato, **2 pt**).

• Il lavoro di F sul segmento orientato di punto iniziale $(0,1)$ e punto finale $(1,0)$ (solo il risultato, **1 pt**).

Esercizio F
Dare la definizione di differenziabilità di una funzione di due variabili $f(x,y)$ in un punto (x_0, y_0) interno al dominio. Dare l'interpretazione geometrica. Enunciare le relazioni con la continuità e derivabilità di f in (x_0, y_0). (**5 pt**)

Compito 1.6.3

Esercizio A
Sia $f : A \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$,

$$A = \{(x,y,z) |\ y^2 + z^2 \leq x, x + y \leq 2\}, \quad f(x,y,z) = (x-1)^2/2 + y^2 + z^2.$$

Determinare i seguenti elementi:

• Punti critici interni al dominio A (**0.5 pt**).

• Le tre regioni di frontiera V_1, V_2, V_3 in cui si applica il teorema dei moltiplicatori di Lagrange (scrivere le equazioni e le disequazioni che definiscono le regioni, **1.5 pt**).

• I tre corrispondenti sistemi da risolvere (scrivere le equazioni dei sistemi di Lagrange, **1.5 pt**).

• I tre corrispondenti insiemi di punti che si ottengono (scrivere gli insiemi delle soluzioni dei tre sistemi precedenti, **3 pt**).

• Perchè l'insieme dei valori $f(A)$ è un intervallo limitato e chiuso? (**0.5 pt**)

• Scrivere $f(A)$. (**0.5 pt**)

Esercizio B
Data l'equazione

$$y'' - 2y' + y = e^x + x$$

determinare i seguenti elementi.

• Integrale generale della equazione omogenea corrispondente (solo il risultato, **1 pt**).

• Un integrale particolare riportando tutti i passaggi significativi. (**3 pt**)

• Integrale generale della equazione completa (solo il risultato, **1 pt**).

• Soluzione con dati iniziali $y(0) = 2, y'(0) = 1$ (solo il risultato, **2 pt**).

Esercizio C
Calcolare, riportando i passaggi significativi, $\displaystyle\int_A \frac{ze^{z^2}}{2 - z - z^2} dxdydz$ con $A = \{0 \leq z \leq (x^2 + y^2)^{1/2}, z \leq 2 - x^2 - y^2, z \leq \sqrt{\log 2}\}$. (**7 pt**).

Esercizio D
Dato il campo vettoriale $F(x, y) = \left(e^y \cos(xe^y), (1/2\sqrt{y}) + xe^y \cos(xe^y)\right)$ determinare i seguenti elementi:

• Il dominio naturale A specificando se è semplicemente connesso (solo il risultato, **1 pt**).

• Dire se il campo F è chiuso in A indicando le derivate delle componenti che servono per rispondere (solo il risultato, **1 pt**).

• Si può prevedere a questo punto se il campo F è esatto in A o meno? Dopo aver risposto, se ne esistono, indicare i potenziali assieme ai passaggi significativi per ottenerli (**2.5 pt**).

• Il lavoro di F sulla curva orientata parametrizzata da

$$r(t) = ((1/2)\cos t, 1 - (1/2)\sin t), 0 \le t \le 2\pi.$$

(risultato e motivazione, **1 pt**).

Esercizio E
Dopo aver dato la definizione di differenziabilità in un punto interno al domino di una funzione da $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}$, discuterne le relazioni con la continuità e la derivabilità nello stesso punto (**3 pt**).

Compito 1.6.4

Esercizio A
Sia $f : A \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$,

$$A = \{(x,y,z)|\ x^2 + y^2 + z^2 \le 4, x + y \le 0\}, \quad f(x,y,z) = (x-3)^2 + y^2 + z^2.$$

Determinare i seguenti elementi:

• Eventuali punti critici interni al dominio A (**0.5 pt**).

• Le tre regioni di frontiera V_1, V_2, V_3 in cui si applica il teorema dei moltiplicatori di Lagrange (scrivere le equazioni e le disequazioni che definiscono le regioni, **1.5 pt**).

• I tre corrispondenti sistemi da risolvere (scrivere le equazioni dei sistemi di Lagrange, **1.5 pt**).

• I tre corrispondenti insiemi di punti che si ottengono (scrivere gli insiemi delle soluzioni dei tre sistemi precedenti, **3 pt**).

• Scrivere $f(A)$. (**0.5 pt**)

Esercizio B
Data l'equazione

$$y' = x(y^3 - y)$$

determinare i seguenti elementi:

• Le eventuali soluzioni costanti. (**1 pt**)

• Tutte le soluzioni definite per ogni $x \in \mathbf{R}$, riportando tutti i passaggi significativi. (**6 pt**)

• Soluzione con dati iniziali $y(0) = \sqrt{1/2}$ (Solo il risultato, **1 pt**)

Esercizio C
Calcolare, riportando i passaggi significativi, $\int_A \frac{1}{(z-1)^3(x^2+y^2)^{1/2}} dxdydz$ con
$A = \{0 \leq z \leq 1/2, 4z^2 \leq x^2 + y^2 \leq (z^2+1)^2\}$. (**6 pt**).

Esercizio D
Dato il campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2} + 2x, \frac{2y}{x^2+y^2} + 1\right)$$

determinare i seguenti elementi:

• Il dominio naturale A specificando se è semplicemente connesso (solo il risultato, **1 pt**).

• Dire se il campo F è chiuso in A indicando le derivate delle componenti che servono per rispondere (solo il risultato, **1 pt**).

• Trovare, se ne esistono, tutti i potenziali indicando i passaggi significativi per ottenerli (**3 pt**).

• Il lavoro di F sulla curva orientata parametrizzata da

$$r(t) = ((3/2)\cos t, 1 - (3/2)\sin t), 0 \leq t \leq 2\pi$$

(risultato e motivazione, **1 pt**).

Esercizio E (**6 pt**)
Dare la definizione di integrale di una funzione scalare continua f su una curva regolare non orientata γ. Provare che la definizione è ben data in quanto non dipende dalla parametrizzazione di γ. Definire infine il baricentro geometrico di γ.

Compito 1.6.5

Esercizio A
Sia $f : A \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$,

$$A = \{(x,y,z)|\ x^2 + y^2 + z \leq 4, x + y \leq 0\}, \quad f(x,y,z) = (x-1)^2 + y^2 + 2z.$$

Determinare i seguenti elementi:

• Eventuali punti critici interni al dominio A (**0.5 pt**).

• Le tre regioni di frontiera V_1, V_2, V_3 in cui si applica il teorema dei moltiplicatori di Lagrange (scrivere le equazioni e le disequazioni che definiscono le regioni, **1.5 pt**).

• I tre corrispondenti sistemi da risolvere (scrivere le equazioni dei sistemi di Lagrange, **1.5 pt**).

• I tre corrispondenti insiemi di punti che si ottengono (scrivere gli insiemi delle soluzioni dei tre sistemi precedenti, **3 pt**).

• Scrivere $f(A)$. (**0.5 pt**)

Eserczio B
Data l'equazione

$$y' = \frac{y(y-2)}{x(x-4)}$$

determinare i seguenti elementi:

• Le eventuali soluzioni costanti. (**1 pt**)

• Tutte le soluzioni con $x \in (0,4)$ e $y \in (0,2)$, riportando tutti i passaggi significativi. (**6 pt**)

• Soluzione con dati iniziali $y(2) = 1$ (Solo il risultato, **1 pt**)

Esercizio C
Calcolare, riportando i passaggi significativi, $\int_A \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dxdydz$ con $A = \{0 < x^2+y^2+z^2 \leq 1, \sqrt{x^2+y^2+z^2} \leq 2z \leq \sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}\}$. (**6 pt**).

Esercizio D
Data la curva non orientata $\gamma \subset \mathbf{R}^3$ definita in maniera cartesiana da

$$\gamma : \begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ \\ z = x+y \end{cases}, \quad \gamma \subset \{x \geq 0, 0 \leq y \leq x\},$$

determinare i seguenti elementi:

• Una parametrizzazione (solo il risultato, **3 pt**).

• L' integrale $\int_\gamma (x^2 - y^2)ds$ indicando i passaggi significativi per ottenerlo (**3 pt**).

Esercizio E(**6 pt**)
Dare la definizione di integrale di un campo vettoriale continuo F su una curva regolare orientata γ. Provare che la definizione è ben data in quanto non dipende dalla parametrizzazione di γ. Provare infine che se F è esatto l'integrale non dipende da γ ma solo dai suoi estremi.

Compito 1.6.6

Esercizio A
Sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$,

$$f(x, y) = y^3(x^2 + y^2 - 4x + 3).$$

Nello studio dei punti di minimo/massimo locali, determinare i seguenti elementi inserendo le risposte nelle rispettive caselle.

• Punti critici. (Solo risultato, **2 pt**)

• Classificazione dei punti critici dove la matrice hessiana consente di concludere. Per ciascuno di questi punti, riportare la corrispondente matrice hessiana e motivare conseguentemente la classificazione del punto (**3 pt**)

• Nei rimanenti punti critici la funzione vale 0. Riportare su un grafico i segni dei valori di f e trarre conclusioni motivate sulla natura di questi punti. (**2 pt**)

Esercizio B
Data l'equazione

$$x'' - 2x' + x = 1 + e^t$$

determinare i seguenti elementi:

• Integrale generale della equazione omogenea corrispondente (solo il risultato, **1 pt**).

• Un integrale particolare riportando tutti i passaggi significativi (**3 pt**).

• Integrale generale della equazione completa (solo il risultato, **1 pt**).

• Soluzione con dati iniziali $y(0) = 1, y'(0) = 0$ (solo il risultato, **2 pt**).

Esercizio C
Calcolare, riportando i passaggi significativi, $\int_A (z-2)e^{x^2+y^2}dxdydz$ con $A = \{x^2+y^2 \le 1, 0 \le z \le 2-\sqrt{x^2+y^2}\}$. (**7 pt**).

Esercizio D
Data la curva di equazioni cartesiane

$$\gamma : \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 4 \\ \\ x+y=0 \end{cases} \quad , \quad \gamma \subset A = \{y \ge 0, z \ge 0\},$$

orientata in maniera tale che $(0,0,2)$ sia il suo punto iniziale, determinare gli elementi seguenti:

• Una parametrizzazione di γ (solo il risultato, **2 pt**).

• L'integrale su γ (non orientata) della funzione scalare $f(x,y,z) = z$ riportando i passaggi principali (**2 pt**).

• L'integrale su γ, orientata, del campo vettoriale $F(x,y.z) = (-z,z,2x)$ riportando i passaggi principali (**2 pt**).

• Si può calcolare l'integrale di lavoro al punto precedente come differenza di potenziale? Motivare la risposta (**1 pt**).

Esercizio E
Enunciare e dimostrare il criterio del confronto ed il suo corollario di confronto asintotico per serie a termini positivi. (**5 pt**)

Compito 1.6.7

Esercizio A
Sia $f : A \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$,

$$A = \{(x,y,z) |\ x^2+z^2 \le y, x+y \le 2\}, \quad f(x,y,z) = x^2 + \frac{(y-1)^2}{2} + z^2.$$

Determinare i seguenti elementi:

• Punti critici interni al dominio A (**0.5 pt**).

• Le tre regioni di frontiera V_1, V_2, V_3 in cui si applica il teorema dei moltiplicatori di Lagrange (scrivere le equazioni e le disequazioni che definiscono le regioni, **1.5 pt**).

• I tre corrispondenti sistemi da risolvere (scrivere le equazioni dei sistemi di Lagrange, **1.5 pt**).

• I tre corrispondenti insiemi di punti che si ottengono (scrivere gli insiemi delle soluzioni dei tre sistemi precedenti, **3 pt**).

• Scrivere $f(A)$ (**0.5 pt**).

Esercizio B
Risolvere

$$y' = \frac{3(y^2+1)}{xy}, \ y(-1) = -2$$

specificando il dominio della soluzione e riportando tutti i passaggi significativi. (**7 pt**)

Esercizio C
Calcolare, riportando i passaggi significativi,

$$\int_A \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dxdydz, \ \ A = \{x^2+y^2+z^2 \leq 4, 0 \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2}, 1 \leq x^2+y^2\}$$

(**7 pt**).

Esercizio D
Data la curva di equazioni cartesiane

$$\gamma : \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 4 \\ \\ x = y \end{cases}, \quad \gamma \subset A = \{y \geq 0, z \geq 0\},$$

orientata in maniera tale che$(0,0,2)$ sia il punto iniziale e $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ il punto finale, determinare gli elementi seguenti:

• Una parametrizzazione di γ (solo il risultato, **2 pt**).

• L'integrale su γ, orientata, del campo vettoriale

$$F(x, y.z) = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2} \Big(y^2+z^2-x^2, -2xy, -2xz\Big)$$

usando la definizione, non usando potenziali, e riportando i passaggi principali (**2.5 pt**).

• Indicare i potenziali del campo F precedente (solo il risultato **2.5 pt**).

Esercizio E

Dimostrare che se la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge in w allora converge in tutti gli z tali che $|z| < |w|$. (**5 pt**)

Capitolo 2

Soluzioni

2.1 Soluzioni serie

Soluzione 2.1.1 (Testo 1.1.1)
Verificare che la serie
$$\sum_{k=1}^{\infty} \log \frac{k+1}{k}$$
è divergente, dopo aver calcolato la somma S_n dei primi n termini.

Usando
$$\log \frac{k+1}{k} = \log(k+1) - \log k$$
si ha per $n \geq 3$:
$$S_n =$$
$$\log 2 + (\log 3 - \log 2) + (\log 4 - \log 3) +$$
$$\ldots + (\log(n+1) - \log(n)) = \log(n+1)$$
quindi
$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \log(n+1) = +\infty.$$

Soluzione 2.1.2 (Testo 1.1.2)
Provare che
$$\sum_{k=1}^{\infty} \log \frac{(k+1)^2}{k(k+2)} = \log 2$$

Usando

$$\log \frac{(k+1)^2}{k(k+2)} = 2\log(k+1) - \log k - \log(k+2)$$

si ha

$S_n =$

$(2\log 2 - \log 1 - \log 3) + (2\log 3 - \log 2 - \log 4) +$

$(2\log 4 - \log 3 - \log 5) + \ldots + (2\log(n+1) - \log n - \log(n+2)) =$

$\log 2 + \log(n+1) - \log(n+2)$

quindi

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\log 2 + \log \frac{n+1}{n+2}\right) = \log 2.$$

Soluzione 2.1.3 (Testo 1.1.3)
Nei due esercizi precedenti il termine generale tende a 0 per $k \to +\infty$, quindi in entrambi è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza di una serie. Cosa mostra, in particolare, il primo esercizio?

Che la condizione termine generale infinitesimo è solo necessaria e non è in generale sufficiente per la convergenza di una serie.

Soluzione 2.1.4 (Testo 1.1.4)
Provare che per $|x| < 1$ vale

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{6^n}\right) x^n = \frac{12-5x}{6-5x-x^2}$$

Le serie geometriche

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-x}{6}\right)^n$$

convergono rispettivamente per $|x| < 1|$ e per $|x| < 6$. Per $|x| < 1$ quindi convergono entrambe e la loro somma vale

$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+(x/6)} = \frac{1}{1-x} + \frac{6}{6+x} = \frac{12-5x}{6-5x-x^2}.$$

Soluzione 2.1.5 (Testo 1.1.5)
Determinare per $|x| < 1$ il valore a cui converge

$$\sum_{n=m}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{6^n}\right) x^n$$

con $m \geq 1$.

Si tratta di resti della serie precedente. Per $|x| < 1$ si ha

$$\sum_{n=m}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{6^n}\right) x^n = \frac{x^m}{1-x} + \frac{(-x/6)^m}{1+(x/6)} =$$

$$\frac{x^m}{1-x} + \frac{(-1)^m 6x^m}{6^m(6+x)} = \frac{\left(6^{m+1} + (-1)^m 6\right) x^m + \left(6^m + (-1)^{m+1} 6\right) x^{m+1}}{6^m(6 - 5x - x^2)}.$$

Soluzione 2.1.6 (Testo 1.1.6)
Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^\alpha n}, \quad \alpha > 0.$$

Si deve studiare

$$\sum_{n=2}^{\infty} f(n)$$

con

$$f(x) = \frac{1}{x \log^\alpha x}.$$

La funzione f è continua, positiva, strettamente decrescente sull'intervallo $[2, +\infty)$ e converge a 0 per $x \to +\infty$. Per il criterio dell'integrale la serie ha lo stesso carattere di

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log^\alpha x} dx.$$

Con la sostituzione $y = \log x$ si trova

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log^\alpha x} dx = \int_{\log 2}^{+\infty} \frac{1}{y^\alpha} dy$$

che converge se e solo se $\alpha > 1$.

Soluzione 2.1.7 (Testo 1.1.7)
Utilizzando il criterio del confronto, determinare il carattere delle seguenti serie a termini positivi

$$(a)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+\sin n}{3^n}, \quad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-\cos n}{n^2}, \quad (c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-\cos n}{n}.$$

(a) Utilizzando le disuguaglianze $0 < 1+\sin n \leq 2$ si ha

$$0 < \frac{1+\sin n}{3^n} \leq \frac{2}{3^n}.$$

Poichè la serie geometrica

$$2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$$

converge, anche la serie data converge.

(b) Da $0 < 2-\cos n \leq 3$ si ha

$$0 < \frac{2-\cos n}{n^2} \leq \frac{3}{n^2}.$$

Poichè la serie

$$3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

converge, anche la serie data converge.

(c) Da $2-\cos n \geq 1$ si ha

$$\frac{2-\cos n}{n} \geq \frac{1}{n}.$$

Poichè la serie armonica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverge a $+\infty$, anche la serie data diverge a $+\infty$.

Soluzione 2.1.8 (Testo 1.1.8)
Utilizzando il criterio del confronto, determinare il carattere della serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^\alpha}, \qquad \alpha > 0.$$

Si ha $\dfrac{\log n}{n^\alpha} \geq \dfrac{1}{n^\alpha}$ per $n \geq 3$ e tutti gli $\alpha > 0$. Poichè la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

diverge a $+\infty$ per $\alpha \leq 1$, anche la serie data diverge a $+\infty$ per gli stessi α.

Per $\alpha > 1$ fissiamo $\varepsilon > 0$ in maniera tale che $\alpha - \varepsilon > 1$ ed usiamo

$$\frac{\log n}{n^\alpha} \leq \frac{n^\varepsilon}{n^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha-\varepsilon}}, \; n \geq n_\varepsilon.$$

Poichè la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-\varepsilon}}, \qquad \alpha - \varepsilon > 1$$

converge, la serie data converge per $\alpha > 1$.

Soluzione 2.1.9 (Testo 1.1.9)
Utilizzando il criterio del confronto in forma asintotica, determinare il carattere della serie a termini positivi

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^3}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\log n}{n^2+\cos n} \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{(n+1)^3}\right), \quad (e) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right).$$

(a) Per $n \to +\infty$

$$\frac{2n+1}{(n+1)^3} \sim \frac{2}{n^2}.$$

Poichè la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$$

converge, anche la serie data converge.

(b) Per $n \to +\infty$

$$\frac{n + \log n}{n^2 + \cos n} \sim \frac{1}{n}.$$

Poichè la serie armonica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverge, anche la serie data diverge.

(c) Per $n \to +\infty$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2 + n + 1}} \sim \frac{1}{n}.$$

Poichè la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverge, anche la serie data diverge.

(d) Da $1/(n+1)^3 \to 0$ e da $\log(1+x) \sim x$ per $x \to 0$, abbiamo

$$\log\left(1 + \frac{1}{(n+1)^3}\right) \sim \frac{1}{(n+1)^3} \sim \frac{1}{n^3}.$$

Poichè la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

converge, anche la serie data converge.

(e) Da $1/n \to 0$ e da $x - \sin x \sim x^3/6$ per $x \to 0$, abbiamo

$$\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{6n^3}.$$

Poichè la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6n^3}$$

converge, anche la serie data converge.

Soluzione 2.1.10 (Testo 1.1.10)
Utilizzando il criterio del confronto in forma asintotica, determinare, al variare di α in $\mathbf{R}_+$, il carattere della serie a termini positivi

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right), \quad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

(d) Da $1/n^\alpha \to 0$ e da $\log(1+x) \sim x$ per $x \to 0$, abbiamo

$$\log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right) \sim \frac{1}{n^\alpha}.$$

Poichè la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

converge se e solo se $\alpha > 1$, anche la serie data converge se e solo se $\alpha > 1$.

(e) Da $1/n^\alpha \to 0$ e da $1-\cos x \sim x^2/2$ per $x \to 0$, abbiamo

$$1-\cos\frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{2n^{2\alpha}}.$$

Poichè la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{2\alpha}}$$

converge se e solo se $\alpha > 1/2$, anche la serie data converge se e solo se $\alpha > 1/2$.

Soluzione 2.1.11 (Testo 1.1.11)
Utilizzando il criterio del rapporto, determinare il carattere della serie a termini positivi

$$(a)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{3^n}, \quad (b)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

$$(c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}, \quad (d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

(a) Poniamo

$$a_n = \frac{n!}{3^n}.$$

Vale

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n!} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{3} = +\infty$$

quindi la serie diverge per il criterio del rapporto.

(b) Poniamo

$$a_n = \frac{2^n}{n!}.$$

Vale

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n+1} = 0$$

quindi la serie converge per il criterio del rapporto.

(c) Poniamo

$$a_n = \frac{2^n}{n^n}.$$

Vale

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 0 \cdot \frac{1}{e} = 0$$

quindi la serie converge per il criterio del rapporto. Risulta agevole anche l'utilizzo del criterio della radice:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0.$$

(d) Poniamo

$$a_n = \frac{n!}{n^n}.$$

Vale

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}$$

quindi la serie converge per il criterio del rapporto.

Soluzione 2.1.12 (Testo 1.1.12)
Utilizzando il criterio della radice, determinare, al variare di α in $\mathbf{R}$ e di a in $\mathbf{R}_+$, il carattere della serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} a^{n}.$$

Abbiamo

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^{\alpha} a^{n}} = \lim_{n\to+\infty} a \left(\sqrt[n]{n}\right)^{\alpha} = a \cdot 1 = a$$

quindi il criterio consente di concludere per $a \neq 1$: la serie converge per $0 < a < 1$ qualunque sia α e non converge per $a > 1$ qualunque sia α.

Per $a = 1$ il criterio è inefficace, tuttavia la serie si riduce a

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-\alpha}}$$

che converge se e solo se $\alpha < -1$.

Soluzione 2.1.13 (Testo 1.1.13)
Studiare, al variare di α in $\mathbf{R}$, la convergenza semplice e assoluta della serie a termini reali

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n^{\alpha}}.$$

Poniamo

$$a_n = \frac{(-1)^{n}}{n^{\alpha}}.$$

Per $\alpha \leq 0$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = \begin{cases} 1 & \text{per } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{per } \alpha < 0 \end{cases}$$

quindi il termine generale non è infinitesimo e la serie data non converge.

Per $\alpha > 0$ lo studio della convergenza assoluta si riconduce alla serie armonica generalizzata:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

Si ha convergenza assoluta se e solo se $\alpha > 1$. Per questi α si ha anche la convergenza semplice come conseguenza di quella assoluta.

La convergenza semplice senza convergenza assoluta si ha per $0 < \alpha \leq 1$ usando il criterio di Leibniz (che si può applicare per tutti gli $\alpha > 0$):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}$$

e la successione

$$\frac{1}{n^\alpha}$$

è decrescente ed infinitesima per tutti gli $\alpha > 0$. La somma delle serie data è un numero reale negativo approssimato da

$$-\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^\alpha}$$

a meno di un errore assoluto minore di $1/(n+1)^\alpha$.

Soluzione 2.1.14 (Testo 1.1.14)
Studiare la convergenza semplice e assoluta delle serie a termini complessi

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-1)^n + in}, \quad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{i + (-1)^n n}, \quad (c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-1)^n + in^2}$$

(a) Posto

$$z_n = \frac{1}{(-1)^n + in}$$

si ha

$$|z_n| = \frac{1}{\sqrt{(-1)^{2n} + n^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + n^2}} \sim \frac{1}{n}$$

e la serie armonica $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge quindi la serie data non è assolutamente convergente.

Si ha poi

$$z_n = \frac{(-1)^n - in}{1+n^2}$$

da cui

$$\Re(z_n) = \frac{(-1)^n}{1+n^2}, \quad \Im(z_n) = \frac{-n}{1+n^2},$$

in particolare $-\Im(z_n) \sim 1/n$ quindi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \Im(z_n) = -\infty$$

per confronto con la serie armonica. Poichè la serie delle parti immaginarie non converge in **R**, la serie data non converge in campo complesso.

Contrariamente all'ordine qui seguito, se si ottiene come prima cosa il fatto che la serie non converge allora lo studio della convergenza assoluta diventa superfluo in quanto una serie che non converge semplicemente è assolutamente divergente.

(b) Posto

$$z_n = \frac{1}{i + (-1)^n n}$$

si ha

$$|z_n| = \frac{1}{\sqrt{1 + (-1)^{2n} n^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} \sim \frac{1}{n}$$

e la serie armonica $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge quindi la serie data non è assolutamente convergente.

Si ha poi

$$z_n = \frac{(-1)^n n - i}{1+n^2}$$

da cui

$$\Re(z_n) = \frac{(-1)^n n}{1+n^2}, \quad \Im(z_n) = \frac{-1}{1+n^2}.$$

La serie delle parti reali converge in **R** ad un valore negativo per Leibniz:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \Re(z_n) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{1+n^2}$$

e la successione decrescente

$$\frac{n}{1+n^2}$$

converge a 0.

La serie delle parti immaginarie ha termine generale di segno costante negativo e $-\Im(z_n) \sim 1/n^2$ quindi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \Im(z_n)$$

converge ad un reale negativo per confronto con la serie armonica generalizzata.

Da quanto precede, la serie data converge (solo semplicemente) in campo complesso ad un numero w situato nel quarto quadrante.

(c) Posto

$$z_n = \frac{1}{(-1)^n + in^2}$$

si ha

$$|z_n| = \frac{1}{\sqrt{(-1)^{2n} + n^4}} = \frac{1}{\sqrt{1 + n^4}} \sim \frac{1}{n^2}$$

quindi la serie data è assolutamente convergente per confronto con la serie armonica generalizzata. Ne segue che è anche semplicemente convergente.

Soluzione 2.1.15 (Testo 1.1.15)

Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze in campo complesso

$$(a)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n + 2^n}{n^2 + 1} z^n, \quad (b)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n + 1} z^n,$$

$$(c)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + 1} z^n, \quad (d)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^{1/n} - 1)^2}{1 - \cos 1/n} z^n$$

(a) Poniamo

$$a_n = \frac{n + 2^n}{n^2 + 1}$$

ed utilizziamo il criterio del rapporto. Si ha

$$|a_n| = a_n \sim \frac{2^n}{n^2}$$

e
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2}{(n+1)^2} = 2$$
quindi il raggio di convergenza vale 1/2.

(b) Poniamo
$$a_n = \frac{3^n}{n+1}$$
ed utilizziamo il criterio del rapporto. Si ha
$$|a_n| = a_n$$
e
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^{n+1}}{n+2} \cdot \frac{n+1}{3^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3(n+1)}{n+2} = 3$$
quindi il raggio di convergenza vale 1/3.

(c) Poniamo
$$a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$$
ed utilizziamo il criterio del rapporto. Si ha
$$|a_n| = \frac{1}{n+1}$$
e
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+2} \cdot (n+1) = 1$$
quindi il raggio di convergenza vale 1.

(d) Poniamo
$$a_n = \frac{(e^{1/n}-1)^2}{1-\cos 1/n}$$
ed utilizziamo il criterio del rapporto. Si ha
$$|a_n| = a_n \sim \frac{1/n^2}{1/2n^2}$$
quindi
$$\lim_{n\to+\infty} |a_n| = 2.$$
Ne segue
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{2}{2} = 1$$
da cui il raggio di convergenza vale 1.

Soluzione 2.1.16 (Testo 1.1.16)
Determinare il comportamento delle serie di potenze di variabile reale

$$(a)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n+1} x^n, \qquad (b)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n$$

negli estremi dell'intervallo di convergenza.

(a) Dal punto (b) dell'esercizio precedente segue in particolare che l'intervallo reale di convergenza ha estremi $\pm 1/3$.

Per $x = 1/3$ la serie si riduce a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{3^n(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

serie armonica. Nell'estremo $1/3$ la serie non converge.

Per $x = -1/3$ la serie si riduce a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(-3)^n(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

serie che converge per Leibniz. Nell'estremo $-1/3$ la serie converge (solo semplicemente).

(b) Dal punto (c) dell'esercizio precedente segue in particolare che l'intervallo reale di convergenza ha estremi ± 1.

Per $x = -1$ la serie si riduce a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

serie armonica. Nell'estremo -1 la serie non converge.

Per $x = 1$ la serie si riduce a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

serie che converge per Leibniz. Nell'estremo 1 la serie converge (solo semplicemente).

Soluzione 2.1.17 (Testo 1.1.17)
Utilizzando i due esercizi precedenti, trovare il dominio D delle seguenti funzioni di variabile reale

$$(a)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n+1}\left(\frac{x+1}{|x|}\right)^n, \qquad (b)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}(x^2-1)^n$$

(a) Dal momento che la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3^n}{n+1}y^n$$

converge in $\mathbf{R}$ per $y \in [-1/3, 1/3)$, il dominio si ottiene risolvendo

$$\frac{-1}{3} \leq \frac{x+1}{|x|} < \frac{1}{3}.$$

Moltiplicando per $3|x|$ con $x \neq 0$ e tenendo conto che $|x| > 0$ per $x \neq 0$, tale condizione equivale a

$$-|x| \leq 3x+3 < |x|,\ \ x \neq 0.$$

Dal momento che $3x + 3 < x$ non ha soluzioni positive, il dominio è un sottoinsieme di $\mathbf{R}_-$ e si ottiene risolvendo

$$x \leq 3x+3 < -x$$

quindi $D = [-3/2, -3/4)$.

Possiamo anche discutere la regolarità della funzione in esame, tenendo conto che per $x \in D$ essa coincide con

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n+1}\left(\frac{x+1}{-x}\right)^n$$

e che la funzione interna

$$\frac{x+1}{-x}$$

è derivabile infinite volte in D.

Il teorema sulle derivate di una serie di potenze assicura quindi che nell'intervallo aperto $(-3/2, -3/4)$ la funzione $f(x)$ è derivabile infinite volte. Ogni derivata si può rappresentare tramite una serie derivando termine a termine la serie di partenza.

Il Lemma di Abel assicura che nell'estremo $-3/2$ la funzione $f(x)$ è continua.

(b) Dal momento che la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} y^n$$

converge in $\mathbf{R}$ per $y \in (-1, 1]$, il dominio si ottiene risolvendo

$$-1 < x^2 - 1 \leq 1$$

che equivale a

$$0 < x^2 \leq 2$$

quindi $D = [-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2}]$.

Possiamo anche discutere la regolarità della funzione in esame, tenendo conto che per $x \in D$ la funzione interna

$$x^2 - 1$$

è derivabile infinite volte.

Il teorema sulle derivate di una serie di potenze assicura quindi che nella unione di intervalli aperti $(-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2})$ la funzione data è derivabile infinite volte. Ogni derivata si può rappresentare tramite una serie derivando termine a termine la serie di partenza.

Il Lemma di Abel assicura che negli estremi $\pm\sqrt{2}$ la funzione data è continua.

2.2 Soluzioni funzioni di più variabili reali

Soluzione 2.2.1 (Testo 1.2.1)
Provare che non esistono i limiti

$$(a) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad (b) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{y}$$

(a) Consideriamo una generica retta per l'origine di direzione (v_1, v_2), $v_1^2 + v_2^2 = 1$, data dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = tv_1 \\ \\ y = tv_2 \end{cases} \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Lungo tale retta si ha

$$\lim_{t\to 0} \frac{|tv_1 + tv_2|}{\sqrt{t^2(v_1^2 + v_2^2)}} = \lim_{t\to 0} \frac{|t||v_1 + v_2|}{|t|} = |v_1 + v_2|.$$

Esistono tutti i limiti lungo le rette ma con valori diversi per direzioni diverse. Il limite dato non esiste.

(b) Nelle equazioni parametriche delle rette precedenti, poniamo $v_2 \neq 0$, cioè escludiamo l'asse x che non può essere considerato visto che la funzione non è definita nei punti $(x, 0)$. I limiti lungo tutte le altre rette hanno valore comune:

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^2(v_1^2 + v_2^2)}{tv_2} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{v_2} = 0$$

ma il limite lungo la parabola $y = x^2$ vale

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + x^4}{x^2} = \lim_{x\to 0}(1 + x^2) = 1.$$

Dal momento che lungo traiettorie diverse si hanno valori limite diversi, il limite dato non esiste.

Soluzione 2.2.2 (Testo 1.2.2)
Siano $\alpha, \beta > 0$. Utilizzando le coordinate polari provare che esiste il limite (e vale 0)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^2 + y^2}$$

se e solo se $\alpha + \beta > 2$.

Posto

$$\begin{cases} x = r\cos\vartheta \\ \\ y = r\sin\vartheta \end{cases}$$

analizziamo il corrispondente limite

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{r^{\alpha+\beta}|\cos\vartheta|^\alpha|\sin\vartheta|^\beta}{r^2} = \lim_{r\to 0^+} r^{\alpha+\beta-2}|\cos\vartheta|^\alpha|\sin\vartheta|^\beta.$$

Esso esiste indipendente da ϑ se e solo se $\alpha+\beta-2 > 0$, quindi per $\alpha+\beta \leq 2$ il limite dato non esiste. Infatti, per $\alpha+\beta < 2$, tale limite vale $+\infty$ quando

$\cos\vartheta \neq 0$ e $\sin\vartheta \neq 0$ mentre vale 0 quando $\cos\vartheta = 0$ oppure $\sin\vartheta = 0$. Se poi $\alpha + \beta = 2$, allora abbiamo valori costanti della funzione data lungo le semirette per l'origine (linee di livello) ma tali valori $|\cos\vartheta|^\alpha |\sin\vartheta|^\beta$ dipendono in maniera evidente da ϑ.

Per $\alpha + \beta > 2$, il limite lungo tutte le semirette per l'origine ha valore comune 0. Il limite dato vale 0 se e solo se

$$\lim_{r\to 0^+} r^{\alpha+\beta-2}|\cos\vartheta|^\alpha |\sin\vartheta|^\beta = 0$$

uniformemente rispetto a ϑ ma questo è vero grazie alla disuguaglianza

$$0 \le r^{\alpha+\beta-2}|\cos\vartheta|^\alpha |\sin\vartheta|^\beta \le r^{\alpha+\beta-2},$$

dove abbiamo usato $|\cos\vartheta| \le 1$, $|\sin\vartheta| \le 1$.

Concludendo, il limite dato esiste se e solo se $\alpha + \beta > 2$. Quando esiste vale 0.

Soluzione 2.2.3 (Testo 1.2.3)
Calcolare

$$(a) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^6}, \quad (b) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(xy)}{x^2+y^4}$$

(a) Posto

$$\begin{cases} x = r\cos\vartheta \\ \\ y = r\sin\vartheta \end{cases},$$

per ogni ϑ fissato abbiamo

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{r^4\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta}{r^2(\cos^2\vartheta + r^4\sin^6\vartheta)} = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^2\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta}{\cos^2\vartheta + r^4\sin^6\vartheta} = 0.$$

Il limite dato esiste e vale 0 se e solo se la convergenza è uniforme rispetto a ϑ. Utilizzando $0 \le \sin^2\vartheta \le 1$ e $\cos^2\vartheta \le \cos^2\vartheta + r^4\sin^6\vartheta$, quindi

$$0 \le \frac{\cos^2\vartheta}{\cos^2\vartheta + r^4\sin^6\vartheta} \le 1,$$

si ottiene

$$0 \le \frac{r^2\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta}{\cos^2\vartheta + r^4\sin^6\vartheta} \le r^2$$

che implica convergenza a 0 per $r \to 0$ uniformemente rispetto a ϑ.

Il limite dato esiste e vale 0.

(b) Da $1 - \cos(xy) \sim x^2y^2/2$ per $xy \to 0$, il limite dato equivale a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{2(x^2+y^4)}.$$

Posto

$$\begin{cases} x = r\cos\vartheta \\ \\ y = r\sin\vartheta \end{cases},$$

per ogni ϑ fissato abbiamo

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{r^4\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta}{2r^2(\cos^2\vartheta + r^2\sin^4\vartheta)} = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^2\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta}{2(\cos^2\vartheta + r^2\sin^4\vartheta)} = 0.$$

Il limite dato esiste e vale 0 se e solo se la convergenza è uniforme rispetto a ϑ. Utilizzando $0 \le \sin^2\vartheta \le 1$ e $\cos^2\vartheta \le \cos^2\vartheta + r^2\sin^4\vartheta$, quindi

$$0 \le \frac{\cos^2\vartheta}{\cos^2\vartheta + r^2\sin^4\vartheta} \le 1,$$

si ottiene

$$0 \le \frac{r^2\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta}{\cos^2\vartheta + r^2\sin^4\vartheta} \le r^2$$

che implica convergenza a 0 per $r \to 0$ uniformemente rispetto a ϑ.

Il limite dato esiste e vale 0.

Soluzione 2.2.4 (Testo 1.2.4)

Seguendo la definizione di derivata direzionale, calcolare $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,0)$ con $f(x,y) = x^3 + y^2 - xy$ e $v = (v_1, v_2)$ un versore di $\mathbf{R}^2$.

Abbiamo

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(1+tv_1, tv_2) - f(1,0)}{t} =$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{(1+tv_1)^3 + t^2v_2^2 - (1+tv_1)tv_2 - 1}{t} =$$

$$\lim_{t\to 0}(3v_1 + 3tv_1^2 + t^2v_1^3 + tv_2^2 - v_2 - tv_1v_2) = 3v_1 - v_2.$$

Soluzione 2.2.5 (Testo 1.2.5)
Perchè non esiste $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ tale che $f_x = 2xy$ e $f_y = -x^2$?

Se tale funzione esistesse, sarebbe derivabile infinite volte visto che tali sono $2xy$ e $-x^2$. In particolare, per il Teorema di Schwarz, dovrebbero coincidere f_{xy} ed f_{yx} mentre

$$\frac{\partial}{\partial y}(2xy) = 2x, \quad \frac{\partial}{\partial x}(-x^2) = -2x$$

che evidentemente non sono identiche.

Soluzione 2.2.6 (Testo 1.2.6)
Provare che le seguenti funzioni continue non sono differenziabili in $(0,0)$

$$(a)\ f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, \quad (b)\ f(x,y) = \sqrt{|xy|}$$

(a) La funzione non è differenziabile in $(0,0)$ perchè non esistono le derivate parziali in $(0,0)$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$

non esiste perchè il limite destro vale 1 mentre quello sinistro vale -1. Già il fatto che una derivata non esista esclude la differenziabilità, comunque si vede in maniera simile che anche la derivata parziale rispetto ad y non esiste in $(0,0)$.

(b) La funzione è identicamente nulla sugli assi cartesiani quindi le derivate parziali in $(0,0)$ esistono e valgono entrambe 0. La funzione è quindi differenziabile in $(0,0)$ se e e solo se

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - 0\cdot h - 0\cdot k - f(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

vale 0. Esaminiamo quindi il limite

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|hk|}}{\sqrt{h^2+k^2}}.$$

Passando a coordinate polari

$$\begin{cases} h = r\cos\vartheta \\ \\ k = r\sin\vartheta \end{cases},$$

abbiamo

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{r\sqrt{|\cos\vartheta\sin\vartheta|}}{r} = \sqrt{|\cos\vartheta\sin\vartheta|}$$

che dipende da ϑ. Il limite

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k - f(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

non esiste, in particolare non vale 0, quindi la funzione f non è differenziabile in $(0,0)$.

Soluzione 2.2.7 (Testo 1.2.7)
Siano $\alpha, \beta > 0$. Provare che la funzione definita da

$$f(x,y) = \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^2+y^2} \text{ se } (x,y) \neq (0,0), \; f(0,0) = 0$$

è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha + \beta > 2$ e differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha + \beta > 3$.

Per definizione, $f(x,y)$ è continua in $(0,0)$ se e solo se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$$

cioè se e solo se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

e, dall'Esercizio 2, questo vale se e solo se $\alpha + \beta > 2$.

Per quanto concerne la differenziabilità, la funzione è identicamente nulla sugli assi cartesiani quindi le derivate parziali in $(0,0)$ esistono e valgono entrambe 0. La funzione è quindi differenziabile in $(0,0)$ se e e solo se

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - 0\cdot h - 0\cdot k - f(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

vale 0. Esaminiamo quindi il limite

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|h|^\alpha |k|^\beta}{(h^2+k^2)^{3/2}}.$$

Passando a coordinate polari

$$\begin{cases} h = r\cos\vartheta \\ \\ k = r\sin\vartheta \end{cases},$$

abbiamo

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{r^{\alpha+\beta}|\cos\vartheta|^\alpha|\sin\vartheta|^\beta}{r^3} = 0$$

per tutti i ϑ se e solo se $\alpha+\beta > 3$. La funzione f risulterà differenziabile in $(0,0)$ se e solo se la convergenza a 0 è uniforme rispetto a ϑ. Da

$$0 \le \frac{r^{\alpha+\beta}|\cos\vartheta|^\alpha|\sin\vartheta|^\beta}{r^3} \le r^{\alpha+\beta-3}$$

tale convergenza uniforme sussiste per tutti gli α, β tali che $\alpha+\beta > 3$.

La funzione f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha+\beta > 3$.

Soluzione 2.2.8 (Testo 1.2.8)
Provare che la funzione definita da

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4+y^2} \text{ se } (x,y) \neq (0,0),\ f(0,0) = 0$$

non è continua in $(0,0)$ ma ammette in tale punto tutte le derivate direzionali.

Calcoliamo i limiti lungo le parabole $y = mx^2$:

$$\lim_{x\to 0} f(x, mx^2) = \lim_{x\to 0} \frac{mx^4}{x^4(1+m^2)} = \frac{m}{1+m^2}.$$

Poichè il valore dipende dalla traiettoria, non esiste il limite il limite per $(x,y) \to (0,0)$ di $f(x,y)$. In particolare tale limite non vale $f(0,0)$ quindi la funzione non è continua in $(0,0)$.

Vediamo che, pur non essendo continua, la funzione è derivabile in $(0,0)$. Sia (v_1, v_2) un versore e calcoliamo

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3 v_1 v_2}{t^3(t^2 v_1^2 + v_2^2)} = \begin{cases} 0 & v_2 = 0 \\ \dfrac{v_1}{v_2} & v_2 \neq 0 \end{cases}.$$

La derivata $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ esiste per ogni $v = (v_1, v_2)$.

Soluzione 2.2.9 (Testo 1.2.9)
Con riferimento all'esercizio precedente, discutere la validità della regola $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0) = (\nabla f(0,0), v)$ con v direzione diversa dai versori degli assi.
Ci sono almeno due condizioni necessarie per la differenziabilità che non sono soddisfatte da f in $(0,0)$: quali?

Considerando i versori degli assi $(1,0)$ e $(0,1)$ otteniamo $\nabla f(0,0) = (0,0)$ quindi la regola

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = (\nabla f(0,0), v)$$

non vale per le altre direzioni v dal momento che per esse $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0) \neq 0$.

Le condizioni necessarie per la differenziabilità che non sono soddisfatte da f in $(0,0)$, sono la validità di questa regola e la continuità.

Soluzione 2.2.10 (Testo 1.2.10)
Sempre con riferimento alla stessa funzione di cui sopra, senza applicare la definizione, per quale risultato f è differenziabile in $(1,0)$? Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico nel punto $(1, 0, f(1,0))$

In ogni punto $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ la funzione è derivabile infinite volte, in particolare ha derivate prime continue quindi è differenziabile per il Teorema del differenziale totale.

Per $(x,y) \neq (0,0)$ le derivate parziali valgono

$$f_x(x,y) = \frac{2xy^3 - 2x^5 y}{(x^4+y^2)^2}, \quad f_y(x,y) = \frac{x^6 - x^2 y^2}{(x^4+y^2)^2},$$

in particolare
$$f_x(1,0) = 0, \quad f_y(1,0) = 1.$$
L'equazione del piano tangente al grafico nel punto $(1, 0, f(1, 0))$ è
$$z - f(1,0) = f_x(1,0)(x-1) + f_y(1,0)(y-0)$$
quindi
$$z = y.$$

Soluzione 2.2.11 (Testo 1.2.11)
Studiare la continuità, derivabilità e differenziabilità in $(0, 0)$ della funzione definita da
$$f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2} \text{ se } (x,y) \neq (0,0), \; f(0,0) = 0$$

Esaminiamo il limite di $f(x, y)$ per $(x, y) \to (0, 0)$. Passando a coordinate polari, abbiamo
$$\lim_{r\to 0} \frac{r^3 \cos^3 \vartheta}{r^2} = \lim_{r\to 0} (r \cos^3 \vartheta) = 0$$
per ogni ϑ. Da
$$0 \leq |r \cos^3 \vartheta| \leq r$$
abbiamo poi che la convergenza è uniforme. Quindi
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$
e la funzione è continua nell'origine.

Esaminiamo le derivate parziali in $(0, 0)$:
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^3} = 1, \quad \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0.$$

Infine, la funzione è differenziabile in $(0, 0)$ se e solo se
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - 1\cdot h - 0 \cdot k - f(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$
Esaminiamo quindi il limite
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \left(\frac{h^3}{h^2+k^2} - h\right) \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{-hk^2}{(h^2+k^2)^{3/2}}.$$

Passando a coordinate polari

$$\begin{cases} h = r\cos\vartheta \\ \\ k = r\sin\vartheta \end{cases},$$

abbiamo

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{-r^3\cos\vartheta\sin^2\vartheta}{r^3} = -\cos\vartheta\sin^2\vartheta$$

che dipende da ϑ. Il limite

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k - f(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

non esiste, in particolare non vale 0. La funzione f nonè differenziabile nell'origine.

Soluzione 2.2.12 (Testo 1.2.12)
Siano $\alpha, \beta > 0$. Studiare la continuità, derivabilità e differenziabilità in $(0,0)$ della funzione definita da

$$f(x,y) = \frac{|x|^\alpha + |y|^{3-\beta}}{(\sqrt{x^2+y^2})^\beta} \text{ se } (x,y) \neq (0,0),\ f(0,0) = 0$$

Per definizione, $f(x,y)$ è continua in $(0,0)$ se e solo se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$$

cioè se e solo se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

Posto

$$\begin{cases} x = r\cos\vartheta \\ \\ y = r\sin\vartheta \end{cases},$$

abbiamo

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{r^\alpha|\cos\vartheta|^\alpha}{r^\beta} + \lim_{r\to 0^+} \frac{r^{3-\beta}|\sin\vartheta|^{3-\beta}}{r^\beta} =$$

$$\lim_{r\to 0^+} \left(r^{\alpha-\beta}|\cos\vartheta|^\alpha\right) + \lim_{r\to 0^+} \left(r^{3-2\beta}|\sin\vartheta|^{3-\beta}\right)$$

che vale 0 per ogni ϑ fissato se e solo

$$(\alpha > \beta) \wedge (\beta < 3/2).$$

Il limite di $f(x, y)$ per $(x, y) \to (0, 0)$ esiste e vale 0 se e solo se la convergenza è uniforme rispetto a ϑ. Utilizzando $0 \le |\sin\vartheta| \le 1$ e $0 \le |\cos\vartheta| \le 1$, si ottiene

$$0 \le \left(r^{\alpha-\beta}|\cos\vartheta|^{\alpha}\right) + \left(r^{3-2\beta}|\sin\vartheta|^{3-\beta}\right) \le r^{\alpha-\beta} + r^{3-2\beta}$$

che implica convergenza a 0 per $r \to 0$ uniformemente rispetto a ϑ esattamente per

$$(\alpha > \beta) \wedge (\beta < 3/2).$$

Per tali valori di α, β la funzione è continua in $(0, 0)$, per altri valori non lo è.

Determiniamo ora le derivate parziali di f in $(0, 0)$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|^{\alpha-\beta}}{x}$$

che esiste finito se e solo se $\alpha > \beta+1$ ed in tale caso vale 0 (nel caso $\alpha-\beta = 1$ il limite destro 1 è diverso dal limite sinistro -1; anche per $\alpha-\beta < 1$ i limiti destro e sinistro sono diversi e non sono nemmeno finiti).

$$\lim_{y\to 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{|y|^{3-2\beta}}{y}$$

che esiste finito se e solo se $\beta < 1$ ed in tale caso vale 0 (nel caso $\beta = 1$ il limite destro 1 è diverso dal limite sinistro -1; anche per $\beta > 1$ i limiti destro e sinistro sono diversi e non sono nemmeno finiti). La funzione è derivabile in $(0, 0)$ se e solo se

$$(\alpha > \beta + 1) \wedge (\beta < 1)$$

e quando è derivabile si ha $f_x(0, 0) = 0$, $f_y(0, 0) = 0$.

Per quanto concerne la differenziabilità, la funzione è quindi differenziabile in $(0, 0)$ se e e solo se è derivabile e

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h, k) - 0 \cdot h - 0 \cdot k - f(0, 0)}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

vale 0. Esaminiamo quindi il limite

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|h|^{\alpha} + |k|^{3-\beta}}{(\sqrt{h^2 + k^2})^{\beta+1}}.$$

Passando a coordinate polari

$$\begin{cases} h = r\cos\vartheta \\ \\ k = r\sin\vartheta \end{cases},$$

abbiamo

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{r^\alpha |\cos\vartheta|^\alpha}{r^{\beta+1}} + \lim_{r\to 0^+} \frac{r^{3-\beta}|\sin\vartheta|^{3-\beta}}{r^{\beta+1}} =$$

$$\lim_{r\to 0^+} \left(r^{\alpha-\beta-1}|\cos\vartheta|^\alpha\right) + \lim_{r\to 0^+} \left(r^{3-2\beta-1}|\sin\vartheta|^{3-\beta}\right) = 0$$

per tutti i ϑ visto che stiamo assumendo che f è derivabile quindi che $(\alpha > \beta + 1) \wedge (\beta < 1)$. La funzione f risulterà differenziabile in $(0,0)$ se e solo se la convergenza a 0 è uniforme rispetto a ϑ. Da

$$0 \le \left(r^{\alpha-\beta-1}|\cos\vartheta|^\alpha\right) + \left(r^{3-2\beta-1}|\sin\vartheta|^{3-\beta}\right) \le r^{\alpha-\beta-1} + r^{3-2\beta-1}$$

tale convergenza uniforme sussiste. La funzione f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo

$$(\alpha > \beta + 1) \wedge (\beta < 1),$$

gli stessi valori per cui è derivabile.

Soluzione 2.2.13 (Testo 1.2.13)
Utilizzando la regola della catena, provare che la parabola di equazioni parametriche

$$x = 3t^2, y = 2t$$

è una linea di livello della funzione

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

Abbiamo

$$f(3t^2, 2t) = \frac{12t^4}{25t^4} = \frac{12}{25}$$

per ogni t, quindi $f(x,y)$ è costante lungo la parabola $x = 3t^2, y = 2t$, $t \neq 0$ (la funzione non é definita in $(0,0)$). Riotteniamo questo fatto, come richiesto, con la regola della catena:

$$f_x(x,y) = \frac{y^6 - x^2y^2}{(x^2+y^4)^2}, \quad f_y(x,y) = \frac{2x^3y - 2xy^5}{(x^2+y^4)^2}$$

e

$$\frac{d}{dt}f(3t^2,2t) = f_x(3t^2,2t)\cdot(3t^2)' + f_y(3t^2,2t)\cdot(2t)' =$$

$$\frac{28t^6}{625t^8}\cdot 6t + \frac{-84t^7}{625t^8}\cdot 2 = \frac{168t^7 - 168t^7}{625t^8} = 0$$

per tutti i $t \neq 0$. Ne segue che la funzione $f(3t^2,2t)$ è costante per $t \in (-\infty,0)$ e per $t \in (0,+\infty)$ quindi le semi-parabole

$$x = 3t^2, y = 2t, \quad t < 0,$$

e

$$x = 3t^2, y = 2t, \quad t > 0,$$

sono linee di livello per $f(x,y)$. Basta calcolare i valori di f in due punti, uno su una semi-parobola ed uno sull'altra, per vedere che sull'intera parabola privata dell'origine la funzione assume un sol valore costante.

Soluzione 2.2.14 (Testo 1.2.14)
Determinare i punti di massimo e minimo relativo della funzione

$$g(t) = f(t,t)$$

con

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

dopo aver calcolato $g'(t)$ con la regola della catena.

La funzione $g(t)$ è definita per $t \neq 0$ in quanto $f(x,y)$ è definita per $(x,y) \neq (0,0)$. Per tali t si ha

$$g(t) = f(t,t) = \frac{t^3}{t^2+t^4} = \frac{t}{1+t^2}$$

di conseguenza

$$g'(t) = \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}.$$

Riotteniamo questo ultimo fatto, come richiesto, con la regola della catena:

$$f_x(x,y) = \frac{y^6 - x^2y^2}{(x^2+y^4)^2}, \quad f_y(x,y) = \frac{2x^3y - 2xy^5}{(x^2+y^4)^2}$$

e
$$\frac{d}{dt}f(t,t) = f_x(t,t)\cdot(t)' + f_y(t,t)\cdot(t)' =$$
$$\frac{t^6-t^4}{(t^2+t^4)^2}\cdot 1 + \frac{2t^4-2t^6}{(t^2+t^4)^2}\cdot 1 =$$
$$\frac{t^2-1}{(1+t^2)^2} + \frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}.$$
per tutti i $t \neq 0$. Studiando il segno della derivata, si ha che la funzione $g(t)$ ha un un punto di minimo relativo per $t=-1$ ed un punto di massimo relativo per $t=1$.

Soluzione 2.2.15 (Testo 1.2.15)
Classificare i punti critici della funzione
$$f(x,y) = x^3(x^2+y^2-1)$$

Calcoliamo le derivate parziali:
$$f_x = x^2(5x^2+3y^2-3), \quad f_y = 2x^3y.$$
Punti critici:
$$\begin{cases} x^2(5x^2+3y^2-3) = 0 \\ 2x^3y = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x^2(5x^2+3y^2-3) = 0 \\ x=0 \vee y=0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y \in \mathbf{R} \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 5x^2-3=0 \\ y=0 \end{cases}.$$
Si ottengono così i punti
$$(\sqrt{3/5},0),\ (-\sqrt{3/5},0),\ (0,y),\ y\in\mathbf{R}.$$
Calcoliamo le derivate parziali seconde:
$$f_{xx} = 20x^3+6xy^2-6x, \quad f_{xy} = f_{yx} = 6x^2y, \quad f_{yy} = 2x^3.$$

Denotando $H(x,y)$ la matrice hessiana nel punto (x,y), abbiamo

$$H(\sqrt{3/5},0) = \begin{pmatrix} 6\sqrt{3/5} & 0 \\ & \\ 0 & (6/5)\sqrt{3/5} \end{pmatrix}$$

definita positiva: il punto critico $(\sqrt{3/5},0)$ è di minimo relativo;

$$H(-\sqrt{3/5},0) = \begin{pmatrix} -6\sqrt{3/5} & 0 \\ & \\ 0 & -(6/5)\sqrt{3/5} \end{pmatrix}$$

definita negativa: il punto critico $(-\sqrt{3/5},0)$ è di massimo relativo.

Si ha poi

$$H(0,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ & \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi nei punti critici $(0,y)$ la matrice hessiana non consente di concludere. In questi punti si ha $f(x,y) = 0$ quindi, per stabilirne la natura, dobbiamo confrontare localmente $f(x,y)$ col valore 0. Questo significa che dobbiamo studiare il segno di $f(x,y)$.
La funzione è prodotto di due fattori: x^3 e $x^2 - y^2 - 1$.
Il fattore x^3 ha lo stesso segno di x quindi positivo nel semipiano $x > 0$, negativo nel semipiano $x < 0$, si annulla nei punti $x = 0$ dell'asse y.
Il fattore $x^2 - y^2 - 1$ si annulla nei punti della circonferenza di centro l'origine e raggio 1, è negativo nei punti interni al cerchio da essa delimitato, è positivo nei punti esterni a tale cerchio.
Conviene ora, tracciando un grafico cartesiano del dominio di f (in questo caso l'intero piano cartesiano), mettere in evidenza tutte le regioni in cui il piano risulta diviso dall'asse y e dalla circonferenza unitaria. In ciascuna regione inserire il segno + o il segno − per i valori $f(x,y)$ applicando la regola dei segni al prodotto dei fattori x^3 e $x^2 + y^2 - 1$. Risulta evidente che in ogni intorno di ogni punto fissato $(0,y)$ la funzione assume valori sia positivi che negativi. Poichè in tali punti la funzione assume valore 0, si tratta di tutti punti di sella.

Soluzione 2.2.16 (Testo 1.2.16)
Classificare i punti critici delle funzioni

$$(a)\ f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 - 4xz - 2yz - 2z^3/3$$

$$(b)\ f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 10z^2 - 4xz - 2yz - 2x^3/3.$$

(a) Calcoliamo le derivate parziali:

$$f_x = 2x - 4z, \quad f_y = 2y - 2z, \quad f_z = -2z - 4x - 2y - 2z^2$$

Punti critici:

$$\begin{cases} 2x - 4z = 0 \\ 2y - 2z = 0 \\ -2z - 4x - 2y - 2z^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2z \\ y = z \\ 2z^2 + 12z = 0 \end{cases}$$

Si ottengono così i punti

$$(0,0,0),\ (-12,-6,-6)$$

Calcoliamo le derivate parziali seconde:

$$f_{xx} = 2, \quad f_{xy} = f_{yx} = 0, \quad f_{xz} = f_{zx} = -4,$$

$$f_{yy} = 2, \quad f_{yz} = f_{zy} = -2, \quad f_{zz} = -2 - 4z.$$

Denotando $H(x,y,z)$ la matrice hessiana nel punto (x,y,z), abbiamo

$$H(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

con minori principali

$$A_1 = 2,\ A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4,\ A_3 = \det(H) = -48.$$

Data la sequenza dei segni dei minori principali, la matrice è non definita: il punto $(0,0,0)$ è di sella.

Abbiamo poi

$$H(-12,-6,-6) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & 22 \end{pmatrix}$$

con minori principali

$$A_1 = 2,\ A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4,\ A_3 = \det(H) = 48.$$

Data la sequenza dei segni dei minori principali, la matrice è definita positiva: il punto $(-12,-6,-6)$ è di minimo relativo.

(b) Calcoliamo le derivate parziali:

$$f_x = 2x - 4z - 2x^2,\quad f_y = 2y - 2z,\quad f_z = 20z - 4x - 2y$$

Punti critici:

$$\begin{cases} 2x - 4z - 2x^2 = 0 \\ 2y - 2z = 0 \\ 20z - 4x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x - 18x^2 = 0 \\ y = z \\ z = 2x/9 \end{cases}$$

Si ottengono così i punti

$$(0,0,0),\ (5/9, 10/81, 10/81)$$

Calcoliamo le derivate parziali seconde:

$$f_{xx} = 2 - 4x, \quad f_{xy} = f_{yx} = 0, \quad f_{xz} = f_{zx} = -4,$$

$$f_{yy} = 2, \quad f_{yz} = f_{zy} = -2, \quad f_{zz} = 20.$$

Denotando $H(x, y, z)$ la matrice hessiana nel punto (x, y, z), abbiamo

$$H(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & 20 \end{pmatrix}$$

con minori principali

$$A_1 = 2, \ A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4, \ A_3 = \det(H) = 40.$$

Data la sequenza dei segni dei minori principali, la matrice è definita positiva: il punto $(0, 0, 0)$ è di minimo locale.

Abbiamo poi

$$H(5/9, 10/81, 10/81) = \begin{pmatrix} -2/9 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & 22 \end{pmatrix}$$

con i primi due minori principali

$$A_1 = -2/9, \ A_2 = \begin{vmatrix} -2/9 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4/9.$$

Già la sequenza dei segni dei due primi minori principali dice che la matrice è non definita: il punto $(5/9, 10/81, 10/81)$ è di sella.

Soluzione 2.2.17 (Testo 1.2.17)

Col metodo dei moltiplicatori di Lagrange, trovare la distanza dall'origine della retta intersezione dei piani $x - y + z = 1$ e $x + y - z = 0$.

Consideriamo la funzione $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ che esprime il quadrato della distanza del generico punto (x,y,z) dall'origine. Si tratta di trovare il punto di minimo vincolato di f sulla retta

$$\begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ \\ x + y - z = 0 \end{cases} .$$

Tale punto esiste ed è unico per motivi di geometria elementare. Col metodo dei moltiplicatori, dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x + \lambda + \mu = 0 \\ \\ 2y - \lambda + \mu = 0 \\ \\ 2z + \lambda - \mu = 0 \\ \\ x - y + z - 1 = 0 \\ \\ x + y - z = 0 \end{cases} .$$

La somma della seconda e terza equazione fornisce $y + z = 0$, quindi ci riduciamo a considerare il sistema

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ \\ x - y + z - 1 = 0 \\ \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

la cui unica soluzione corrisponde al punto $(1/2, -1/4, 1/4)$. Questo è l'unico punto sulla retta data che realizza la minima distanza dall'origine. Tale distanza vale

$$\sqrt{(1/2)^2 + (-1/4)^2 + (1/4)^2} = \sqrt{6}/4.$$

Soluzione 2.2.18 (Testo 1.2.18)
Sia $f : A \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$,

$$A = \{(x,y,z) |\ x^2 + y^2 - z^2 \le 0, -2 \le z \le 0\}, \quad f(x,y,z) = x^2 + y + 2z.$$

Determinare l'immagine $f(A)$.

L'insieme A è limitato, chiuso, connesso. La funzione f è continua quindi

$$f(A) = [m, M],\ \ m = \min_A f, M = \max_A f.$$

Da

$$f_x = 2x,\ \ f_y = 1,\ \ f_z = 2$$

la funzione non ha punti critici interni ad A: m ed M sono assunti sulla frontiera che suddividiamo nelle seguenti parti:

$$V_1 = \{(x, y, z)|\ x^2 + y^2 - z^2 = 0, -2 < z < 0\}$$

superficie conica, varietà di dimensione 2;

$$V_2 = \{(x, y, z)|\ x^2 + y^2 - z^2 < 0, z + 2 = 0\} =$$

$$\{(x, y, z)|\ x^2 + y^2 < 4, z + 2 = 0\}$$

cerchio nel piano $z = -2$, varietà di dimensione 2;

$$V_3 = \{(x, y, z)|\ x^2 + y^2 - z^2 = 0, z + 2 = 0\} =$$

$$\{(x, y, z)|\ x^2 + y^2 - 4 = 0, z + 2 = 0\}$$

circonferenza nel piano $z = -2$, varietà di dimensione 1;

$$V_4 = (0, 0, 0)$$

vertice del cono, punto singolare.

Applichiamo il metodo dei moltiplicatori su V_1:

$$\begin{cases} 2x + 2\lambda x = 0 \\ 1 + 2\lambda y = 0 \\ 2 - 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ -2 < z < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \vee \lambda = -1 \\ y = -1/(2\lambda) \\ z = -2y \\ x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ -2 < z < 0 \end{cases}.$$

Scegliendo nella prima equazione $x = 0$ si giunge, considerando le altre equazioni, al punto $(0, 0, 0)$ che non è in V_1 (vedi disequazione $-2 < z < 0$). Prendendo $\lambda = -1$ si ottengono i due punti di V_1

$$P_1 = (\sqrt{3}/2, 1/2, -1),\ P_2 = (-\sqrt{3}/2, 1/2, -1).$$

Su V_2:

$$\begin{cases} 2x + \lambda \cdot 0 = 0 \\ 1 + \lambda \cdot 0 = 0 \\ 2 + \lambda = 0 \\ z + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 < 4 \end{cases}$$

che in maniera evidente non ha soluzioni.

Su V_3:

$$\begin{cases} 2x + 2\lambda x + \mu \cdot 0 = 0 \\ 1 + 2\lambda y + \mu \cdot 0 = 0 \\ 2 + \mu = 0 \\ x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ z + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \ \vee \ \lambda = -1 \\ y = -1/(2\lambda) \\ 2 + \mu = 0 \\ x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ z + 2 = 0 \end{cases}$$

da cui, per $x = 0$,

$$P_3 = (0, 2, -2), \ P_4 = (0, -2, -2)$$

e, per $\lambda = -1$,

$$P_5 = (\sqrt{15}/2, 1/2, -2), \ P_6 = (-\sqrt{15}/2, 1/2, -2).$$

Ai punti trovati col metodo dei moltiplicatori dobbiamo aggiungere il punto singolare

$$P_7 = (0, 0, 0).$$

Calcoliamo i valori corrispondenti:

$$f(P_1) = f(P_2) = f(\pm\sqrt{3}/2, 1/2, -1) = -3/4$$

$$f(P_3) = f(0, 2, -2) = -2, \ f(P_4) = f(0, -2, -2) = -6$$

$$f(P_5) = f(P_6) = f(\pm\sqrt{15}/2, 1/2, -2) = 1/4$$

$$f(P_7) = f(0, 0, 0) = 0.$$

Concludendo

$$f(A) = [-6, 1/4].$$

Soluzione 2.2.19 (Testo 1.2.19)
Sia $f : A \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$,

$$A = \{(x, y, z) | \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, |z| \geq 1\}, \quad f(x, y, z) = \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}y^2 + z.$$

Determinare l'immagine $f(A)$.

L'insieme A è limitato, chiuso, unione di due connessi disgiunti $A = A_+ \cup A_-$,

$$A_+ = \{(x,y,z)|\ x^2+y^2+z^2 \le 4, z \ge 1\},$$

$$A_- = \{(x,y,z)|\ x^2+y^2+z^2 \le 4, z \le -1\}.$$

La funzione f è continua quindi

$$f(A) = f(A_+) \cup f(A_-) = [m_+, M_+] \cup [m_-, M_-],\ \ m_\pm = \min_{A_\pm} f, M_\pm = \max_{A_\pm} f.$$

Da

$$f_x = x/4,\ \ f_y = y/8,\ \ f_z = 1$$

la funzione non ha punti critici interni ad A: $m_\pm$ ed $M_\pm$ sono assunti sulla frontiera che suddividiamo nelle seguenti parti:

$$V_1^+ = \{(x,y,z)|\ x^2+y^2+z^2 = 4, z > 1\},$$

$$V_1^- = \{(x,y,z)|\ x^2+y^2+z^2 = 4, z < -1\},$$

calotte sferiche, varietà di dimensione 2;

$$\begin{array}{l} V_2^+ = \{(x,y,z)|\ x^2+y^2+z^2 < 4, z-1 = 0\} = \\ \{(x,y,z)|\ x^2+y^2 < 3, z-1 = 0\} \end{array},$$

$$\begin{array}{l} V_2^- = \{(x,y,z)|\ x^2+y^2+z^2 < 4, z+1 = 0\} = \\ \{(x,y,z)|\ x^2+y^2 < 3, z+1 = 0\} \end{array},$$

cerchi nei rispettivi piani $z = 1$ e $z = -1$, varietà di dimensione 2;

$$\begin{array}{l} V_3^+ = \{(x,y,z)|\ x^2+y^2+z^2 = 4, z-1 = 0\} = \\ \{(x,y,z)|\ x^2+y^2 = 3, z-1 = 0\} \end{array},$$

$$\begin{array}{l} V_3^- = \{(x,y,z)|\ x^2+y^2+z^2 = 4, z+1 = 0\} = \\ \{(x,y,z)|\ x^2+y^2 = 3, z+1 = 0\} \end{array},$$

circonferenze nei rispettivi piani $z = 1$ e $z = -1$, varietà di dimensione 1;

Applichiamo il metodo dei moltiplicatori su $V_1^{\pm}$:

$$\begin{cases} x/4 + 2\lambda x = 0 \\ y/8 + 2\lambda y = 0 \\ 1 + 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ \pm z > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \vee \lambda = -1/8 \\ y = 0 \vee \lambda = -1/16 \\ z = -1/(2\lambda) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ \pm z > 1 \end{cases} .$$

Si hanno soluzioni solo scegliendo nelle prime due equazioni $x = y = 0$:

$$P_1^+ = (0, 0, 2),\ P_1^- = (0, 0, -2)$$

da considerare rispettivamente per A_+ e per A_-.

Su $V_2^{\pm}$:

$$\begin{cases} x/4 + \lambda \cdot 0 = 0 \\ y/8 + \lambda \cdot 0 = 0 \\ 1 + \lambda = 0 \\ z = \pm 1 \\ x^2 + y^2 < 3 \end{cases}$$

che in maniera evidente non ha soluzioni.

Su $V_3^{\pm}$:

$$\begin{cases} x/4 + 2\lambda x + \mu \cdot 0 = 0 \\ y/8 + 2\lambda y + \mu \cdot 0 = 0 \\ 1 + \mu = 0 \\ x^2 + y^2 - 3 = 0 \\ z \mp 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \ \vee \ \lambda = -1/8 \\ y = 0 \ \vee \ \lambda = -1/16 \\ 2 + \mu = 0 \\ x^2 + y^2 - 3 = 0 \\ z \mp 1 = 0 \end{cases}$$

da cui,

$$P_2^+ = (0, \sqrt{3}, 1), \ P_3^+ = (0, -\sqrt{3}, 1),$$

$$P_4^+ = (\sqrt{3}, 0, 1), \ P_5^+ = (-\sqrt{3}, 0, 1)$$

su A_+ e

$$P_2^- = (0, \sqrt{3}, -1), \ P_3^- = (0, -\sqrt{3}, -1),$$

$$P_4^- = (\sqrt{3}, 0, -1), \ P_5^- = (-\sqrt{3}, 0, -1)$$

su A_-.

Calcoliamo i valori corrispondenti per A_+:

$$f(P_1^+) = f(0, 0, 2) = 2,$$

$$f(P_2^+) = f(P_3^+) = f(0, \pm\sqrt{3}, 1) = 19/16,$$

$$f(P_4^+) = f(P_5^+) = f(\pm\sqrt{3}, 0, 1) = 11/8,$$

da cui $f(A_+) = [19/16, 2]$.

Per A_-:

$$f(P_1^-) = f(0,0,-2) = -2,$$

$$f(P_2^-) = f(P_3^-) = f(0, \pm\sqrt{3}, -1) = -13/16,$$

$$f(P_4^-) = f(P_5^-) = f(\pm\sqrt{3}, 0, -1) = -5/8,$$

da cui $f(A_+) = [-2, -5/8]$.

Concludendo

$$f(A) = [19/16, 2] \cup [-2, -5/8].$$

2.3 Soluzioni equazioni differenziali

Soluzione 2.3.1 (Testo 1.3.1)
Risolvere l'equazione differenziale lineare

$$y' = \frac{x}{x^2+1} y.$$

Il coefficiente $a(x) = x/(x^2+1)$ è definito per ogni $x \in \mathbf{R}$ quindi le soluzioni di questa equazione lineare hanno tutte per dominio $\mathbf{R}$. Calcoliamo una primitiva $A(x)$ di $a(x) = x/(x^2+1)$:

$$A(x) = \int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \log(x^2+1).$$

L'integrale generale della equazione data è

$$y = ce^{\frac{1}{2}\log(x^2+1)} = ce^{\log\sqrt{x^2+1}}$$

quindi

$$y = c\sqrt{x^2+1}, \quad x \in \mathbf{R}$$

con c costante reale arbitraria.

Soluzione 2.3.2 (Testo 1.3.2)
Risolvere il problema

$$y' = -\frac{2}{x} y + \frac{\sin 4x}{x^2}, \; y(-\pi/8) = 0$$

Il più grande intervallo che contiene il punto iniziale $x = -\pi/8$ ed in cui i coefficienti

$$a(x) = -\frac{2}{x},\ b(x) = \frac{\sin 4x}{x^2}$$

sono continui è $\mathbf{R}_- = (-\infty, 0)$. Questo è il dominio della soluzione di questo problema di Cauchy lineare. Calcoliamo in $\mathbf{R}_-$ una primitiva di $a(x)$

$$A(x) = -\int \frac{2}{x} dx = -2 \log |x| = \log \frac{1}{x^2}$$

ed applichiamo la formula risolutiva delle equazioni lineari del primo ordine:

$$y = e^{\log \frac{1}{x^2}} \left(c + \int e^{-\log \frac{1}{x^2}} \cdot \frac{\sin 4x}{x^2} dx \right)$$

da cui

$$y = \frac{1}{x^2} \left(c + \int x^2 \cdot \frac{\sin 4x}{x^2} dx \right)$$

quindi

$$y = \frac{1}{x^2} \left(c - \frac{\cos 4x}{4} \right), \quad x \in \mathbf{R}_-$$

rappresenta l'integrale generale.

Imponendo le condizioni iniziali otteniamo

$$0 = \frac{64}{\pi^2} \cdot c$$

da cui $c = 0$. La unica soluzione del problema dato è

$$y = -\frac{\cos 4x}{4x^2},\ x \in \mathbf{R}_-.$$

Soluzione 2.3.3 (Testo 1.3.3)
Risolvere il problema

$$y'' = \frac{y'}{x} + x \cos x,\ y(\pi/2) = 1,\ y'(\pi/2) = \pi/2$$

Problema di Cauchy per una equazione lineare del secondo ordine. Il più grande intervallo che contiene il punto iniziale $x = \pi/2$ ed in cui i coefficienti

$$a(x) = \frac{1}{x},\ b(x) = x \cos x$$

sono continui è $\mathbf{R}_+ = (0, +\infty)$. Questo è il dominio della soluzione.

Ponendo $v = y'$, ci riconduciamo al problema del primo ordine

$$v' = a(x)v + b(x), \ v(\pi/2) = \pi/2.$$

L'integrale generale per $x \in \mathbf{R}_+$ è espresso da

$$v = e^{\log x}\left(c + \int e^{-\log x} \cdot x \cos x \ dx\right)$$

quindi

$$v = x\left(c + \int \frac{1}{x} \cdot x \cos x \ dx\right)$$

da cui

$$v = x\left(c + \sin x\right).$$

Imponendo la condizione iniziale, si ha

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}(c+1)$$

quindi

$$c = 0.$$

Tornando alla incognita y, abbiamo

$$y = \int v(x)dx = \int x \sin x dx, \quad x \in \mathbf{R}_+$$

quindi, integrando per parti,

$$y = -x\cos x + \sin x + c, \ x \in \mathbf{R}_+.$$

Imponendo la condizione iniziale per y, abbiamo

$$1 = 1 + c$$

da cui $c = 0$. La soluzione del problema dato è:

$$y = -x\cos x + \sin x, \ x \in \mathbf{R}_+.$$

Soluzione 2.3.4 (Testo 1.3.4)
Risolvere il problema

$$y' = \frac{2y}{x} + 2x\sqrt{y},\ y(-1) = 1$$

Problema di Cauchy per una equazione di Bernoulli. Dividendo per $\sqrt{y}$, che possiamo supporre diversa da 0 per il valore iniziale $y = 1$, si ottiene

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} = \frac{2\sqrt{y}}{x} + 2x,\ y(-1) = 1$$

quindi

$$\frac{d}{dx}(2\sqrt{y}) = \frac{2\sqrt{y}}{x} + 2x,\ y(-1) = 1.$$

Ponendo

$$v = \sqrt{y}$$

ci riduciamo al problema lineare

$$v' = \frac{v}{x} + x,\ v(-1) = \sqrt{1} = 1.$$

Il più grande intervallo che contiene il punto iniziale $x = -1$ ed in cui i coefficienti

$$a(x) = \frac{1}{x},\ b(x) = x$$

sono continui è $\mathbf{R}_- = (-\infty, 0)$. Questo è il dominio della soluzione. Applicando la formula dell'integrale generale, abbiamo

$$v = e^{\log x}\left(c + \int e^{-\log x} \cdot x\ dx\right)$$

quindi

$$v = x\left(c + \int \frac{1}{x} \cdot x\ dx\right)$$

da cui

$$v = x(c + x) = cx + x^2.$$

Imponendo la condizione iniziale, si ha

$$1 = -c + 1$$

quindi

$$c = 0,\ v = x^2,\ x \in \mathbf{R}_-.$$

Tornando alla incognita y, abbiamo

$$y = v^2, \; x \in \mathbf{R}_-$$

quindi la soluzione del problema dato è:

$$y = x^4, \; x \in \mathbf{R}_-.$$

Soluzione 2.3.5 (Testo 1.3.5)
Risolvere il problema

$$y' = \frac{3(y^2+1)}{xy}, \; y(-1) = -2$$

Problema di Cauchy per una equazione a variabili separabili. Poichè deve essere $x \neq 0$ ed il punto iniziale è $x = -1$, il dominio della soluzione è incluso in $\mathbf{R}_-$.

Dal momento che $y^2 + 1$ non si annulla, possiamo scrivere

$$\int \frac{y}{y^2+1} dy = \int \frac{3}{x} dx$$

quindi

$$\frac{1}{2} \log(y^2+1) = 3 \log |x| + c$$

da cui

$$\log(y^2+1) = 6 \log(-x) + c$$

tenendo conto che $x < 0$ dal momento che x appartiene ad un intorno del valore iniziale -1 e denotando ancora con c la costante $2c$.

Imponendo la condizione iniziale si ha

$$\log 5 = c$$

quindi

$$\log(y^2+1) = \log 5(-x)^6 = \log 5x^6.$$

Dunque

$$y^2 + 1 = 5x^6,$$

$$y^2 = 5x^6 - 1.$$

Tenendo conto della condizione iniziale $y(-1) = -2$, l'unica soluzione del problema è rappresentata da

$$y = -\sqrt{5x^6 - 1}.$$

Il dominio è il più grande intervallo in $\mathbf{R}_-$ che contiene il punto iniziale $x = -1$ e dove tale espressione definisce una funzione derivabile con derivata continua. Quindi, la soluzione del problema dato è:

$$y = -\sqrt{5x^6 - 1},\ x \in (-\infty, -\sqrt[6]{1/5})$$

(la funzione $-\sqrt{5x^6 - 1}$ è definita anche per $x = -\sqrt[6]{1/5}$ ma in tal punto non è derivabile).

Soluzione 2.3.6 (Testo 1.3.6)
Dopo aver detto, senza fare calcoli, perchè la soluzione è una funzione strettamente crescente nel proprio intervallo di definizione, risolvere il problema

$$y' = \frac{e^y}{x},\ y(1) = 0.$$

Poichè deve essere $x \neq 0$ ed il punto iniziale è $x = 1$, il dominio della soluzione è incluso in $\mathbf{R}_+$. Quindi, essendo $x > 0$ nel dominio ed $e^y > 0$ sempre, la soluzione ha derivata $y' = e^y/x > 0$ nell'intervallo del dominio. Ne segue che in tale intervallo è una funzione strettamente crescente.

Determiniamo la soluzione col metodo della separazione delle variabili:

$$\int e^{-y} dy = \int x^{-1} dx,$$

$$-e^{-y} = \log|x| + c,$$

$$e^{-y} = -\log x + c$$

tenendo conto che $x > 0$ e denotando ancora con c la costante $-c$. Imponendo la condizione iniziale si ha

$$1 = c$$

quindi la soluzione è rappresentata da

$$e^{-y} = 1 - \log x,$$

$$-y = \log(1 - \log x),$$
$$y = -\log(1 - \log x).$$

Il dominio è il più grande intervallo in $\mathbf{R}_+$ che contiene il punto iniziale $x = 1$ e dove tale espressione definisce una funzione derivabile con derivata continua. Quindi, la soluzione del problema dato è:

$$y = -\log(1 - \log x),\ x \in (0, e).$$

Soluzione 2.3.7 (Testo 1.3.7)
Risolvere il problema

$$y' = \frac{y(y-2)}{x(x-4)},\ y(2) = 1.$$

Problema a variabili separabili. Deve essere $x \neq 0$ e $x \neq 4$, quindi l'intervallo di definizione della soluzione, dovendo contenere il punto iniziale $x = 2$, è incluso in $(0, 4)$.

Il valore iniziale $y = 1$ ci consente di supporre $y(y-2) \neq 0$ quindi di dividere per $y(y-2)$:

$$\int \frac{1}{y(y-2)} dy = \int \frac{1}{x(x-4)} dx.$$

Procedendo coi fratti semplici

$$\int \left(-\frac{1}{2y} + \frac{1}{2(y-2)} \right) dy = \int \left(-\frac{1}{4x} + \frac{1}{4(x-4)} \right) dx,$$

$$-\frac{1}{2} \log|y| + \frac{1}{2} \log|y-2| = -\frac{1}{4} \log|x| + \frac{1}{4} \log|x-4| + c,$$
$$-2\log y + 2\log(2-y) = -\log x + \log(4-x) + c$$

tenendo conto che, per la condizione iniziale, possiamo assumere

$$x > 0,\ x - 4 < 0,\ y > 0,\ y - 2 < 0$$

e denotando ancora con c la costante $2c$. Imponendo la condizione iniziale, si ha poi

$$-2\log 1 + 2\log 1 = -\log 2 + \log 2 + c$$

quindi $c = 0$. La soluzione è rappresentata da

$$\log\left(\frac{2-y}{y}\right)^2 = \log\frac{4-x}{x},$$

$$\left(\frac{2-y}{y}\right)^2 = \frac{4-x}{x},$$

$$\frac{2-y}{y} = \sqrt{\frac{4-x}{x}}$$

dove si è tenuto conto che il valore iniziale $y = 1$ implica $(2-y)/y > 0$. Risolvendo rispetto ad y abbiamo

$$y = \frac{2}{1+\sqrt{\frac{4-x}{x}}}.$$

Il dominio è il più grande intervallo incluso in $(0, 4)$ che contiene il punto iniziale $x = 2$ e dove tale espressione definisce una funzione derivabile con derivata continua. Quindi, la soluzione del problema dato è:

$$y = \frac{2}{1+\sqrt{\frac{4-x}{x}}}, \ x \in (0, 4).$$

Soluzione 2.3.8 (Testo 1.3.8)
Risolvere l'equazione

$$y' = x(y^3 - y).$$

Calcolando le soluzioni di

$$y^3 - y = 0$$

otteniamo per l'equazione differenziale data le soluzioni costanti $y = 0$, $y = 1$, $y = -1$ con dominio $\mathbf{R}$. Per determinare le altre soluzioni separiamo le variabili:

$$\int \frac{1}{y(y-1)(y+1)}dy = \int x\ dx.$$

Procedendo coi fratti semplici

$$\int\left(-\frac{1}{y} + \frac{1}{2(y-1)} + \frac{1}{2(y+1)}\right)dy = \frac{x^2}{2} + c,$$

$$-\log|y| + \frac{1}{2}\log|y-1| + \frac{1}{2}\log|y+1| = \frac{x^2}{2} + c,$$

$$-2\log|y| + \log|y-1| + \log|y+1| = x^2 + c$$

denotando ancora con c la costante arbitraria $2c$. Abbiamo

$$\log\frac{|y^2-1|}{y^2} = x^2 + c,$$

$$\frac{|y^2-1|}{y^2} = e^{x^2}\cdot e^c = ke^{x^2}, \quad k > 0$$

denotando con k la costante positiva e^c. L'uguaglianza ottenuta

$$\frac{|y^2-1|}{y^2} = ke^{x^2},\ k > 0$$

equivale a

$$\frac{y^2-1}{y^2} = ce^{x^2},\ c \neq 0$$

togliendo il valore assoluto e lasciando quindi che la costante assuma anche valori negativi. Risolvendo rispetto ad y^2, si ha

$$y^2 = \frac{1}{1-ce^{x^2}},\ c \neq 0.$$

Affinchè risultino definite delle funzioni

$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{1-ce^{x^2}}}$$

deve essere

$$1 - ce^{x^2} > 0$$

per x in un opportuno intervallo dipendente da c, cioè dipendente dalla particolare soluzione che si vuole considerare. Questa condizione è vera per ogni $x \in \mathbf{R}$ se $c < 0$, altrimenti equivale a

$$e^{x^2} < \frac{1}{c}, \quad c > 0$$

per c positivo. Dal momento che il valore minimo di e^{x^2} è 1, ci sono degli x che soddisfano questa ultima condizione solo se

$$\frac{1}{c} > 1$$

quindi solo se $c < 1$. In questo caso vale $e^{x^2} < \dfrac{1}{c}$ per

$$x \in (-\sqrt{\log(1/c)}, \sqrt{\log(1/c)}).$$

Riassumendo e concludendo, l'equazione data ha le soluzioni costanti su **R**

$$y = 0,\ \ y = 1,\ \ y = -1$$

e tutte le altre soluzioni sono rappresentate da

$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{1 - ce^{x^2}}},\ \ c \neq 0,\ \ c < 1,$$

ciascuna con dominio

$$\begin{array}{ll} \mathbf{R} & \text{per } c < 0 \\ (-\sqrt{\log(1/c)}, \sqrt{\log(1/c)}) & \text{per } 0 < c < 1. \end{array}$$

Come casi limite, per $c \to 0$ si riottengono le soluzioni costanti in **R** $y = \pm 1$ mentre per $c \to -\infty$ si riottiene la soluzione costante in **R** $y = 0$.

Soluzione 2.3.9 (Testo 1.3.9)

Calcolare $\displaystyle\int_0^2 y(x)dx$ con y la soluzione di

$$y' = \frac{y \log y}{x},\ \ y(1) = 1/2.$$

Dobbiamo risolvere un problema di Cauchy a variabili separabili. Deve essere $x \neq 0$ ed il dominio della soluzione deve contenere $x = 1$. Il dominio è un sottinsieme di $\mathbf{R}_+$.

Dalla condizione iniziale, si può supporre $y \log y \neq 0$, quindi possiamo scrivere

$$\int \frac{1}{y \log y} dy = \int \frac{1}{x} dx,$$

$$\log|\log y| = \log|x| + c,$$

$$\log(-\log y) = \log x + c$$

tenendo conto che dalla condizione iniziale si ha

$$\log y < 0,\ x > 0.$$

Imponendo $y(1) = 1/2$ otteniamo

$$\log(\log 2) = c$$

da cui

$$\log(-\log y) = \log(x \log 2),$$

$$\log y = -x \log 2,$$

$$y = e^{-x\log 2} = e^{\log 2^{-x}} = 2^{-x}.$$

La soluzione è data da

$$y = 2^{-x},\quad x \in \mathbf{R}_+.$$

L'integrale richiesto vale

$$\int_0^2 2^{-x} dx = \left[-\frac{2^{-x}}{\log 2} \right]_0^2 = \frac{3}{4\log 2}.$$

Soluzione 2.3.10 (Testo 1.3.10)

Calcolare $\int_{-1}^{0} y(x)dx$ con y la soluzione di

$$y' = \frac{y^2 + y}{x},\ y(-1) = 1.$$

Dobbiamo risolvere un problema di Cauchy a variabili separabili. Deve essere $x \neq 0$ ed il dominio della soluzione deve contenere $x = -1$. Il dominio è un sottinsieme di $\mathbf{R}_-$.

Dalla condizione iniziale, si può supporre $y^2 + y \neq 0$, quindi possiamo scrivere

$$\int \frac{1}{y(y+1)} dy = \int \frac{1}{x} dx,$$

$$\int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} \right) dy = \int \frac{1}{x} dx,$$

$$\log|y| - \log|y+1| = \log|x| + c,$$

$$\log \frac{y}{y+1} = \log(-x) + c$$

tenendo conto che dalla condizione iniziale si ha

$$y > 0, \ y+1 > 0 \ x < 0.$$

Imponendo $y(-1) = 1$ otteniamo

$$-\log 2 = c$$

da cui

$$\log \frac{y}{y+1} = \log\left(-\frac{x}{2}\right),$$
$$\frac{y}{y+1} = -\frac{x}{2}.$$

Risolvendo rispetto ad y, si ha

$$y = -\frac{x}{2+x}.$$

Il dominio è il più grande intervallo incluso in $\mathbf{R}_-$ che contiene il punto iniziale $x = -1$ e dove l'espressione trovata definisce una funzione derivabile con derivata continua. La soluzione è data quindi da

$$y = -\frac{x}{2+x}, \ x \in (-2, 0).$$

L'integrale richiesto vale

$$-\int_{-1}^{0} \frac{x}{2+x} dx = -\int_{-1}^{0} \left(1 - \frac{2}{2+x}\right) dx =$$
$$-\left[x - 2\log(2+x)\right]_{-1}^{0} = -1 + 2\log 2.$$

Soluzione 2.3.11 (Testo 1.3.11)
Risolvere il problema

$$y' = \frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x}, \ y(2) = \pi/3.$$

Deve essere $x \neq 0$ ed il dominio deve contenere $x = 2$ quindi il dominio è incluso in $\mathbf{R}_+$.

Con la sostituzione
$$z = \frac{y}{x}$$
abbiamo
$$y = xz, \quad y' = z + xz'$$
e ci riduciamo ad un problema a variabili separabili:
$$z + xz' = z + \tan z, \quad z(2) = \frac{y(2)}{2} = \frac{\pi}{6}$$
cioè
$$z' = \frac{\tan z}{x}, \ z(2) = \frac{\pi}{6}.$$
Dalla condizione iniziale si può assumere $\tan z \neq 0$, quindi possiamo scrivere
$$\int \frac{\cos z}{\sin z} dz = \int \frac{1}{x} dx,$$
$$\log|\sin z| = \log|x| + c,$$
$$\log \sin z = \log x + c$$
tenendo conto che per la condizione iniziale vale
$$\sin z > 0, \ x > 0.$$
Imponendo $z(2) = \dfrac{\pi}{6}$ abbiamo
$$\log \frac{1}{2} = \log 2 + c$$
da cui
$$c = \log \frac{1}{4}.$$
La soluzione del problema nell'incognita z è espressa da
$$\log \sin z = \log \frac{x}{4},$$
$$\sin z = \frac{x}{4}.$$
Il valore iniziale $\pi/6$ di z appartiene all'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$ dove la restrizione del seno ha per inversa l'arcoseno. Abbiamo quindi
$$z = \arcsin \frac{x}{4}$$

dove deve essere $x > 0$, il dominio di z deve contenere $x = 2$, la funzione z deve essere derivabile con derivata continua nel proprio dominio.
La soluzione del problema nell'incognita z è quindi data da

$$z = \arcsin \frac{x}{4}, \quad x \in (0, 4)$$

(la funzione $\arcsin(x/4)$ è definita anche per $x = 4$ ma non è derivabile in tale punto).

Concludendo, tornando al problema dato, da

$$y = xz$$

otteniamo la soluzione

$$y = x \arcsin \frac{x}{4}, \ x \in (0, 4).$$

Soluzione 2.3.12 (Testo 1.3.12)
Risolvere le equazioni

$$(a)\ y'' - 5y' + 6y = e^x, \quad (b)\ y'' - 2y' + y = e^{2x}.$$

(a) Equazione lineare a coefficienti costanti, non omogenea. Le soluzioni sono definite su tutto $\mathbf{R}$ dove risulta definito e continuo il termine noto e^x.

Le soluzioni dell'equazione caratteristica

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

sono

$$\lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = 3$$

quindi l'integrale generale della equazione omogenea associata è

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}.$$

Dal momento che e^x non risolve l'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare del tipo

$$u = ae^x.$$

Derivando e sostituendo nella equazione

$$u' = ae^x, \ u'' = ae^x,$$

u è soluzione se e solo se

$$e^x(a - 5a + 6a) = e^x,$$

$$2a = 1,$$

$$a = \frac{1}{2}.$$

L'integrale generale della equazione data è quindi

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + \frac{1}{2} e^x.$$

(b) Equazione lineare a coefficienti costanti, non omogenea. Le soluzioni sono definite su tutto **R** dove risulta definito e continuo il termine noto e^{2x}.

L'unica soluzione, con molteplicità 2, dell'equazione caratteristica

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

è

$$\lambda = 1,$$

quindi l'integrale generale della equazione omogenea associata è

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x.$$

Dal momento che e^{2x} non risolve l'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare del tipo

$$u = ae^{2x}.$$

Derivando e sostituendo nella equazione

$$u' = 2ae^{2x}, \ u'' = 4ae^{2x},$$

u è soluzione se e solo se

$$e^{2x}(4a - 4a + a) = e^{2x},$$

$$a = 1.$$

L'integrale generale della equazione data è quindi

$$y = (c_1 + c_2 x)e^x + e^{2x}.$$

Soluzione 2.3.13 (Testo 1.3.13)
Risolvere l'equazione
$$y'' + y = \cos x.$$

Equazione lineare a coefficienti costanti, non omogenea. Le soluzioni sono definite su tutto **R** dove risulta definito e continuo il termine noto $\cos x$.

Le soluzioni dell'equazione caratteristica
$$\lambda^2 + 1 = 0$$
sono
$$\lambda_1 = i,\ \lambda_2 = -i$$
quindi l'integrale generale della equazione omogenea associata è
$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$
Dal momento che $\cos x$ risolve l'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare del tipo
$$u = ax \cos x + bx \sin x.$$
Derivando e sostituendo nella equazione
$$u' = a \cos x - ax \sin x + b \sin x + bx \cos x,$$
$$u'' = -2a \sin x - ax \cos x + 2b \cos x - bx \sin x,$$
u è soluzione se e solo se
$$-2a \sin x - ax \cos x + 2b \cos x - bx \sin x + ax \cos x + bx \sin x = \cos x,$$
$$-2a \sin x + 2b \cos x = \cos x,$$
$$\begin{cases} a = 0 \\ b = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$
L'integrale generale della equazione data è quindi
$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2} x \sin x.$$

Soluzione 2.3.14 (Testo 1.3.14)
Risolvere il problema

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x} + 12x - 8,\ y(0) = 1, y'(0) = 3.$$

Problema di Cauchy per una equazione lineare a coefficienti costanti, non omogenea. La soluzione è definita su tutto **R** dove risulta definito e continuo il termine noto $e^{2x} + 12x - 8$.

L'unica soluzione, con molteplicità 2, dell'equazione caratteristica

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

è

$$\lambda = 2,$$

quindi l'integrale generale della equazione omogenea associata è

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}.$$

Dal momento che e^{2x} ed xe^{2x} risolvono l'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare del tipo

$$u = ax^2 e^{2x} + bx + c.$$

Derivando e sostituendo nella equazione

$$u' = (2ax + 2ax^2)e^{2x} + b,\ u'' = (2a + 8ax + 4ax^2)e^{2x},$$

u è soluzione se e solo se

$$e^{2x}(2a + 8ax + 4ax^2 - 8ax - 8ax^2 + 4ax^2) - 4b + 4bx + 4c = e^{2x} + 12x - 8,$$

$$2ae^{2x} + 4bx + 4c - 4b = e^{2x} + 12x - 8,$$

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 4b = 12 \\ 4c - 4b = -8, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = 3 \\ c = 1. \end{cases}$$

L'integrale generale della equazione data è quindi

$$y = \left(c_1 + c_2 x + \frac{1}{2}x^2\right) e^{2x} + 3x + 1.$$

Derivando

$$y' = \left(c_2 + x + 2c_1 + 2c_2 x + x^2\right) e^{2x} + 3$$

ed imponendo $y(0) = 1,\ y'(0) = 3$, si ha

$$\begin{cases} c_1 + 1 = 1 \\ \\ c_2 + 2c_1 + 3 = 3 \end{cases}$$

da cui

$$c_1 = c_2 = 0.$$

La soluzione del problema dato è

$$y = \frac{1}{2}x^2 e^{2x} + 3x + 1.$$

Soluzione 2.3.15 (Testo 1.3.15)
Risolvere l'equazione

$$y'' + 2y' + 3y = e^{-x}\cos x.$$

Equazione lineare a coefficienti costanti, non omogenea. Le soluzioni sono definite su tutto **R** dove risulta definito e continuo il termine noto $e^{-x}\cos x$.

Le soluzioni dell'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$$

sono

$$\lambda_1 = -1 - i\sqrt{2},\ \lambda_2 = -1 + i\sqrt{2}$$

quindi l'integrale generale della equazione omogenea associata è

$$y = e^{-x}\left(c_1 \cos(x\sqrt{2}) + c_2 \sin x(\sqrt{2})\right).$$

Dal momento che $e^{-x}\cos x$ non risolve l'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare del tipo

$$u = e^{-x}(a\cos x + b\sin x).$$

Derivando e sostituendo nella equazione

$$u' = e^{-x}(-a\cos x - b\sin x - a\sin x + b\cos x),$$

$$u'' = e^{-x}(2a\sin x - 2b\cos x),$$

u è soluzione se e solo se

$$e^{-x}(a\cos x + b\sin x) = e^{-x}\cos x,$$

$$a = 1,\ b = 0.$$

L'integrale generale della equazione data è quindi

$$y = e^{-x}\left(c_1\cos(x\sqrt{2}) + c_2\sin(x\sqrt{2}) + \cos x\right).$$

Soluzione 2.3.16 (Testo 1.3.16)
Sia $k \in \mathbf{R}$. Risolvere l'equazione

$$y'' + ky = 0$$

e tra le soluzioni trovare quelle che verificano le condizioni ai limiti

$$y(0) = y(\pi) = 0.$$

Le soluzioni della equazione caratteristica

$$\lambda^2 + k = 0$$

cambiano aspetto secondo il segno del parametro k:

$$\lambda_1 = i\sqrt{k},\ \lambda_2 = -i\sqrt{k} \qquad \text{per } k > 0,$$

$$\lambda = 0,\ \text{doppia}, \qquad \text{per } k = 0,$$

$$\lambda_1 = \sqrt{-k},\ \lambda_2 = -\sqrt{-k} \qquad \text{per } k < 0.$$

Conseguentemente, l'integrale generale è dato da

$$
\begin{aligned}
&y = c_1 \cos(x\sqrt{k}) + c_2 \sin(x\sqrt{k}) && \text{per } k > 0,\\
&y = c_1 + c_2 x && \text{per } k = 0,\\
&y = c_1 e^{x\sqrt{-k}} + c_2 e^{-x\sqrt{-k}} && \text{per } k < 0.
\end{aligned}
$$

Imponendo le condizioni $y(0) = y(\pi) = 0$ nei vari casi si trova:

$$k = 0: \qquad \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_1 + \pi c_2 = 0 \end{cases}$$

da cui

$$c_1 = c_2 = 0 \text{ per } k = 0$$

che fornisce solo la soluzione nulla

$$y = 0 \text{ per } k = 0.$$

Poi

$$k < 0: \qquad \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{\pi\sqrt{-k}} + c_2 e^{-\pi\sqrt{-k}} = 0 \end{cases}$$

da cui

$$c_1 = c_2 = 0 \text{ per } k < 0$$

che fornisce ancora solo la soluzione nulla

$$y = 0 \text{ per } k < 0.$$

Passando a $k > 0$, abbiamo

$$k > 0: \qquad \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_1 \cos(\pi\sqrt{k}) + c_2 \sin(\pi\sqrt{k}) = 0 \end{cases}$$

da cui ancora

$$c_1 = c_2 = 0,\ y = 0 \text{ per } k > 0, \sqrt{k} \notin \mathbf{Z}.$$

Infine, se $k > 0$ e $\sqrt{k}$ è un intero, cioè $k = m^2$ con m intero, allora si ha che

$$k = m^2: \qquad \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_1 \cos(m\pi) + c_2 \sin(m\pi) = 0 \end{cases}$$

è soddisfatta prendendo $c_1 = 0$ e $c_2 = c$ costante arbitraria.
Per $k = m^2$ con m intero si hanno le infinite soluzioni

$$y = c\sin(mx),\ \ c \in \mathbf{R}.$$

Soluzione 2.3.17 (Testo 1.3.17)
Risolvere il problema

$$y'' - 2y' + y = t^{-2}e^t,\ \ y(1) = 0, y'(1) = -e.$$

Problema di Cauchy per una equazione lineare a coefficienti costanti, non omogenea. Deve essere $t \neq 0$ quindi la soluzione è definita su $\mathbf{R}_+$ che contiene il punto iniziale $t = 1$ e dove risulta definito e continuo il termine noto $t^{-2}e^t$.

L'unica soluzione dell'equazione caratteristica

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

è

$$\lambda = 1$$

quindi l'integrale generale della equazione omogenea associata è

$$y = e^t(c_1 + c_2 t).$$

Dato che compare a termine noto una potenza di t con esponente negativo, i metodi per simpatia non sono applicabili. Usiamo allora la variazione delle costanti e cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$u = e^t\gamma_1(t) + te^t\gamma_2(t).$$

Dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} e^t\gamma_1' + te^t\gamma_2' = 0 \\ e^t\gamma_1' + (t+1)e^t\gamma_2' = t^{-2}e^t \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} \gamma_1' + t\gamma_2' = 0 \\ \gamma_1' + (t+1)\gamma_2' = t^{-2} \end{cases}$$

quindi
$$\begin{cases} \gamma_1' + t\gamma_2' = 0 \\ \\ \gamma_2' = t^{-2} \end{cases}$$
infine
$$\begin{cases} \gamma_1' = -t^{-1} \\ \\ \gamma_2' = t^{-2}. \end{cases}$$
Integrando e tenendo conto di $t > 0$, possiamo prendere
$$\gamma_1 = -\log t,\ \gamma_2 = -t^{-1}.$$
L'integrale generale della equazione non omogenea è quindi
$$y = e^t(c_1 + c_2 t - \log t - 1)$$
che possiamo scrivere
$$y = e^t(c_1 + c_2 t - \log t)$$
denotando ancora c_1 la costante $c_1 - 1$.

Derivando
$$y' = e^t(c_1 + c_2 t - \log t + c_2 - t^{-1})$$
ed imponendo le condizioni $y(1) = 0, y'(1) = -e$, abbiamo
$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ \\ c_1 + 2c_2 - 1 = -1 \end{cases}$$
da cui
$$c_1 = c_2 = 0.$$
La soluzione del problema dato è
$$y = -e^t \log t.$$

2.4 Soluzioni integrali multipli

Soluzione 2.4.1 (Testo 1.4.1)
Calcolare
$$\int_A \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy, \quad A = \{x^2 + y^2 \le 4, 0 \le y \le x, 1 \le x\}.$$

Tracciata nel piano la regione corrispondente all'insieme A e posto $f(x,y) = y/\sqrt{x^2+y^2}$, si può pensare l'integrale dato come differenza di due integrali:

$$\int_A f(x,y)dxdy = \int_{A_1} f(x,y)dxdy - \int_{A_2} f(x,y)dxdy$$

con

$$A_1 = \{x^2+y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x\},\ A_2 = \{0 \leq y \leq x, x < 1\}.$$

Sul settore circolare A_1 usiamo le coordinate polari. In tali coordinate, A_1 corrisponde a

$$0 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{4}.$$

Quindi

$$\int_{A_1} f(x,y)dxdy = \int_0^{\pi/4}\int_0^2 \frac{r\sin\vartheta}{r}\cdot r\ drd\vartheta = \int_0^{\pi/4}\sin\vartheta\ d\vartheta\int_0^2 r\ dr =$$

$$[-\cos\vartheta]_0^{\pi/4}[r^2/2]_0^2 = (1-\sqrt{1/2})\cdot 2 = 2-\sqrt{2}.$$

Sul triangolo A_2 usiamo le formule di riduzione:

$$\int_{A_2} f(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^x \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dydx =$$

$$\int_0^1\left[\sqrt{x^2+y^2}\right]_{y=0}^{y=x}dx = \int_0^1 x(\sqrt{2}-1)dx =$$

$$(\sqrt{2}-1)[x^2/2]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}.$$

L'integrale dato vale

$$\int_A f(x,y)dxdy = 2-\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2} = \frac{5-3\sqrt{2}}{2}.$$

È possibile anche utilizzare solo le coordinate polari, tenendo conto che A corrisponde a:

$$r \leq 2,\ 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{4},\ 1 \leq r\cos\vartheta$$

quindi

$$0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{4},\ \frac{1}{\cos\vartheta} \leq r \leq 2.$$

Abbiamo:

$$\int_{A_1} f(x,y)dxdy = \int_0^{\pi/4}\int_{1/\cos\vartheta}^{2} \frac{r\sin\vartheta}{r}\cdot r\ drd\vartheta =$$

$$\int_0^{\pi/4}\sin\vartheta\int_{1/\cos\vartheta}^{2} r\ drd\vartheta = \int_0^{\pi/4}[r^2/2]_{1/\cos\vartheta}^{2}\sin\vartheta\ d\vartheta =$$

$$\int_0^{\pi/4} 2\sin\vartheta\ d\vartheta - \int_0^{\pi/4}\frac{\sin\vartheta}{2\cos^2\vartheta}\ d\vartheta =$$

$$[-2\cos\vartheta]_0^{\pi/4} - \left[\frac{1}{2\cos\vartheta}\right]_0^{\pi/4} =$$

$$2-\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2} = \frac{5-3\sqrt{2}}{2}.$$

Soluzione 2.4.2 (Testo 1.4.2)
Dato il settore circolare

$$A = \{x^2+y^2\leq 2, 0\leq y\leq x\}$$

a) Calcolarne il baricentro geometrico.
b) Calcolare il volume del solido da esso generato con una rotazione completa attorno all'asse y senza utilizzare il Teorema di Guldino.
c) Verificare che il Teorema di Guldino è soddisfatto.

a) L'area del settore A (ottavo di cerchio) vale

$$\mu_2(A) = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}.$$

Calcoliamo gli integrali

$$\int_A x\ dxdy,\ \int_A y\ dxdy$$

in coordinate polari:

$$\int_A x\ dxdy = \int_0^{\pi/4}\int_0^{\sqrt{2}} r^2\cos\vartheta\ drd\vartheta = \int_0^{\pi/4}\cos\vartheta\ d\vartheta\int_0^{\sqrt{2}} r^2\ dr =$$

$$[\sin\vartheta]_0^{\pi/4}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{2}{3};$$

$$\int_A y\ dxdy = \int_0^{\pi/4}\int_0^{\sqrt{2}} r^2 \sin\vartheta\ drd\vartheta = \int_0^{\pi/4} \sin\vartheta\ d\vartheta \int_0^{\sqrt{2}} r^2\ dr =$$

$$[-\cos\vartheta]_0^{\pi/4}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}} = \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{2}{3}\left(\sqrt{2}-1\right).$$

Il baricentro $G = (x_G, y_G)$ ha coordinate

$$x_G = \frac{1}{\mu_2(A)}\int_A x\ dxdy = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{2}{3} = \frac{8}{3\pi},$$

$$y_G = \frac{1}{\mu_2(A)}\int_A y\ dxdy = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{2}{3}\left(\sqrt{2}-1\right) = \frac{8}{3\pi}\left(\sqrt{2}-1\right).$$

(b) Ci sono vari modi di calcolare il volume richiesto. Ad esempio, posto S il solido in questione, possiamo utilizzare le coordinate sferiche. In tali coordinate, il solido S corrisponde a:

$$0 \le r \le \sqrt{2},\ \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \vartheta \le 2\pi.$$

Quindi

$$\mu_3(S) = \int_S 1\ dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{\sqrt{2}} r^2 \sin\varphi\ drd\varphi d\vartheta =$$

$$2\pi\,[-\cos\varphi]_{\pi/4}^{\pi/2}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}} = 2\pi\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

(c) Il Teorema di Guldino afferma

$$\mu_3(S) = \mu_2(A)\cdot 2\pi\cdot x_G.$$

Nel caso in questione, questo si verifica nella uguaglianza

$$\frac{4\pi}{3} = \frac{\pi}{4}\cdot 2\pi\cdot\frac{8}{3\pi}.$$

Soluzione 2.4.3 (Testo 1.4.3)
Si consideri la sfera euclidea S e la sua parte A

$$S = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}, \quad A = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ 4z^2 \leq x^2 + y^2 + z^2\}.$$

Calcolare il rapporto tra il volume di A e l'integrale

$$\int_S (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} dxdydz.$$

In coordinate sferiche, A corrisponde a

$$0 \leq r \leq 2,\ 4r^2 \cos^2 \varphi \leq r^2,\ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi$$

quindi

$$0 \leq r \leq 2,\ \cos^2 \varphi \leq \frac{1}{4},\ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi$$

che equivale a

$$0 \leq r \leq 2,\ \frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{2\pi}{3},\ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi.$$

Ne segue

$$\mu_3(A) = \int_A 1\ dxdydz = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \sin\varphi\ d\varphi \int_0^2 r^2 dr =$$

$$2\pi[-\cos\varphi]_{\pi/3}^{2\pi/3} \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2 = 2\pi \cdot 1 \cdot \frac{8}{3} = \frac{16\pi}{3}.$$

Calcoliamo ora l'integrale sulla sfera S della funzione

$$f = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2},$$

sempre utilizzando le coordinate sferiche. In tali coordinate,

$$f = r$$

mentre la sfera S corrisponde a

$$0 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \varphi \leq \pi,\ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi.$$

Quindi

$$\int_S f\ dxdydz = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\pi} \sin\varphi\ d\varphi \int_0^2 r^3 dr =$$

$$2\pi[-\cos\varphi]_0^{\pi} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2 = 2\pi \cdot 2 \cdot 4 = 16\pi.$$

Il rapporto richiesto vale
$$\frac{16\pi}{3} \cdot \frac{1}{16\pi} = \frac{1}{3}.$$

Soluzione 2.4.4 (Testo 1.4.4)
Siano $\alpha > -2$, $R > 0$. Posto
$$A_R = \{0 \le z \le R^2 - x^2 - y^2\}, \quad \mu_3(A_R) = \text{ volume di } A_R,$$
calcolare
$$\lim_{R\to+\infty} \frac{1}{R^3\mu_3(A_R)} \int_{A_R} (x^2+y^2)^{\alpha/2} dxdydz.$$

In coordinate cilindriche A_R corrisponde a
$$0 \le r \le R,\ 0 \le z \le R^2 - r^2,\ 0 \le \vartheta \le 2\pi$$
quindi
$$\mu_3(A_R) = \int_{A_R} 1\ dxdydz = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^R r \int_0^{R^2-r^2} dzdrd\vartheta =$$
$$2\pi \int_0^R r(R^2-r^2)dr = 2\pi \left[\frac{R^2r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=R} = \frac{\pi R^4}{2}$$
mentre
$$\int_{A_R} (x^2+y^2)^{\alpha/2} dxdydz = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^R r^{1+\alpha} \int_0^{R^2-r^2} dzdrd\vartheta =$$
$$2\pi \int_0^R r^{1+\alpha}(R^2-r^2)dr = 2\pi \left[\frac{R^2r^{2+\alpha}}{2+\alpha} - \frac{r^{4+\alpha}}{4+\alpha}\right]_{r=0}^{r=R} =$$
$$\frac{4\pi R^{4+\alpha}}{(2+\alpha)(4+\alpha)}.$$
Il limite richiesto diventa
$$\lim_{R\to+\infty} \frac{2}{\pi R^7} \cdot \frac{4\pi R^{4+\alpha}}{(2+\alpha)(4+\alpha)} = \begin{cases} 0 & \text{per } -2 < \alpha < 3 \\ 8/35 & \text{per } \alpha = 3 \\ +\infty & \text{per } \alpha > 3. \end{cases}$$

Soluzione 2.4.5 (Testo 1.4.5)
Calcolare la misura (volume) di $A \subset \mathbf{R}^3$

$$A = \{\frac{3}{2}(x^2+y^2) - 1 \le z \le 1 - \frac{1}{2}(x^2+y^2), z \ge 0\}.$$

In coordinate cilindriche A corrisponde a

$$\frac{3}{2}r^2 - 1 \le z \le 1 - \frac{1}{2}r^2,\ z \ge 0,\ r \ge 0,\ 0 \le \vartheta \le 2\pi$$

quindi

$$\mu_3(A) = \int_A 1\ dxdydz = 2\pi \int_B r\ drdz$$

dove B è il sottinsieme del piano (r, z) descritto da

$$\frac{3}{2}r^2 - 1 \le z \le 1 - \frac{1}{2}r^2,\ z \ge 0,\ r \ge 0.$$

Tracciato il grafico di tale insieme e calcolato il punto d'incontro $(1, 1/2)$ per $r > 0$ delle parabole $z = \frac{3}{2}r^2 - 1$ e $z = 1 - \frac{1}{2}r^2$, scegliamo di integrare prima in dr e poi in dz. Dal grafico, risolvendo rispetto ad r le equazioni delle parabole, si vede che

$$B = B_1 \cup B_2,$$

$$B_1 = \{0 \le z \le 1/2,\ 0 \le r \le \sqrt{2-2z}\},$$

$$B_2 = \{1/2 \le z \le 1,\ 0 \le r \le \sqrt{(2z+2)/3}\},$$

da cui

$$2\pi \int_B r\ drdz = 2\pi \int_{B_1} r\ drdz + 2\pi \int_{B_2} r\ drdz =$$

$$2\pi \int_0^{1/2} \int_0^{\sqrt{2-2z}} r\ drdz + 2\pi \int_{1/2}^1 \int_0^{\sqrt{(2z+2)/3}} r\ drdz =$$

$$\pi \int_0^{1/2} [r^2]_0^{\sqrt{2-2z}}\ dz + \pi \int_{1/2}^1 [r^2]_0^{\sqrt{(2z+2)/3}}\ dz =$$

$$\pi \int_0^{1/2} (2-2z)dz + \frac{\pi}{3} \int_{1/2}^1 (2z+2)dz =$$

$$\pi[2z - z^2]_0^{1/2} + \frac{\pi}{3}[z^2+2z]_{1/2}^1 = \frac{3}{4}\pi + \frac{7}{12}\pi = \frac{4}{3}\pi.$$

Soluzione 2.4.6 (Testo 1.4.6)
Calcolare $\int_A \frac{e^{z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdydz$ con

$$A = \{\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1\}.$$

In coordinate cilindriche, A corrisponde a

$$0 \le r \le z \le 1, \; 0 \le \vartheta \le 2\pi,$$

mentre la funzione $f = e^{z^2}/\sqrt{x^2+y^2}$ diventa

$$f = \frac{e^{z^2}}{r}.$$

Quindi

$$\int_A f \; dxdydz = 2\pi \int_B e^{z^2} drdz$$

dove B nel piano (r, z) è il triangolo descritto da

$$0 \le r \le z \le 1.$$

La funzione ci porta ad integrare prima in dr poi in dz:

$$2\pi \int_B e^{z^2} drdz = 2\pi \int_0^1 e^{z^2} \int_0^z drdz =$$

$$2\pi \int_0^1 ze^{z^2} dz = \pi \left[e^{z^2}\right]_0^1 = \pi(e-1).$$

Soluzione 2.4.7 (Testo 1.4.7)
Calcolare la misura (volume) di $A \subset \mathbf{R}^3$

$$A = \{0 \le z \le \sqrt{x^2+y^2}, \; z \le -x^2 - y^2 + 2\sqrt{x^2+y^2}\}.$$

In coordinate cilindriche, A corrisponde a

$$0 \le z \le r, \; z \le -r^2 + 2r, \; 0 \le \vartheta \le 2\pi,$$

quindi

$$\mu_3(A) = \int_A 1 \ dxdydz = 2\pi \int_B r \ drdz$$

dove B nel piano (r, z) è descritto da

$$0 \leq z \leq r, \ \ z \leq -2r^2 + 2r.$$

Calcolati i punti di incontro $(0, 0)$ e $(1, 1)$ tra la retta $z = r$ e la parabola $z = -r^2 + 2r$ e tracciato un grafico di B, abbiamo che un ordine conveniente di integrazione è prima in dz, poi in dr:

$$2\pi \int_B r \ drdz = 2\pi \int_0^1 r \int_r^{-r^2+2r} dzdr =$$

$$2\pi \int_0^1 r(-r^2 + r)dr = 2\pi \left[-\frac{r^4}{4} + \frac{r^3}{3} \right]_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

• Nei due esercizi seguenti calcolare $\displaystyle\int_A f(x, y, z)dxdydz$ con le formule di riduzione.

Soluzione 2.4.8 (Testo 1.4.8)

$$A = \{x + y \leq \sqrt{z}, x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 1\}, \quad f = x.$$

Applichiamo le formule di riduzione integrando prima in $dxdy$ sulle sezioni a z fissato, poi in dz.

La proiezione di A sull'asse z è l'intervallo $[0, 1]$. Fissato z in tale intervallo, la sezione piana A_z di A a tale quota fissata è il triangolo nel piano (x, y) descritto da

$$x + y \leq \sqrt{z}, \ \ x \geq 0, \ \ y \geq 0$$

e si ha

$$\int_A x \ dxdydz = \int_0^1 \left(\int_{A_z} x \ dxdy \right) dz.$$

Calcoliamo l'integrale doppio interno applicando le formule di riduzione nel piano ed integrando, ad esempio, prima in dy poi in dx. A tale scopo, conviene descrivere A_z nella seguente maniera equivalente

$$0 \leq x \leq \sqrt{z}, \ \ 0 \leq y \leq \sqrt{z} - x$$

da cui segue

$$\int_{A_z} x\ dxdy = \int_0^{\sqrt{z}} x \int_0^{\sqrt{z}-x} dydx =$$

$$\int_0^{\sqrt{z}} x(\sqrt{z}-x)dx = \left[\frac{x^2\sqrt{z}}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{z}} = \frac{z\sqrt{z}}{6}.$$

Dunque

$$\int_A x\ dxdydz = \int_0^1 \frac{z\sqrt{z}}{6}dz = \left[\frac{z^{5/2}}{15}\right]_0^1 = \frac{1}{15}.$$

Soluzione 2.4.9 (Testo 1.4.9)

$$A = \{-1 \leq x \leq 0, y \geq 0, x+y \leq 1, 0 < z \leq x^2\}, \quad f = 1/(2\sqrt{z}).$$

Applichiamo le formule di riduzione integrando prima in dz sulle sezioni a (x,y) fissato, poi in $dxdy$.

La proiezione di A sul piano (x,y) è il trapezio B descritto da

$$-1 \leq x \leq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1.$$

Fissato (x,y) in tale proiezione, la sezione unidimensionale $A_{(x,y)}$ di A corrispondente è l'intervallo delle z

$$(0, x^2]$$

e si ha

$$\int_A \frac{1}{2\sqrt{z}}dxdydz = \int_B \left(\int_0^{x^2} \frac{1}{2\sqrt{z}}dz\right) dxdy =$$

$$\int_B [\sqrt{z}]_0^{x^2} dxdy = \int_B |x|\ dxdy = -\int_B x\ dxdy$$

tenendo anche conto del fatto che $x \leq 0$ in B. Calcoliamo ora l'integrale doppio a cui ci siamo ricondotti applicando le formule di riduzione nel piano ed integrando, ad esempio, prima in dy poi in dx:

$$-\int_B x\ dxdy = -\int_{-1}^0 x \int_0^{1-x} dydx =$$

$$-\int_{-1}^0 x(1-x)dx = \left[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^0 = \frac{5}{6}.$$

• Nei rimanenti esercizi calcolare $\int_A f(x,y,z)dxdydz$ passando in coordinate cilindriche o sferiche dopo aver determinato quale dei due cambi di variabile è il più idoneo.

Soluzione 2.4.10 (Testo 1.4.10)

$$A = \{0 \le z \le 1, y \ge 0, 1 \le x^2+y^2 \le (z^2+1)^2\}, \quad f = \frac{-z}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

In coordinate cilindriche, A corrisponde a

$$0 \le z \le 1,\ r\sin\vartheta \ge 0,\ 1 \le r^2 \le (z^2+1)^2$$

quindi a

$$0 \le z \le 1,\ 0 \le \vartheta \le \pi,\ 1 \le r \le z^2+1$$

mentre la funzione f diventa

$$f = \frac{-z}{r^3}.$$

Ne segue

$$\int_A f\ dxdydz = \pi \int_B \frac{-z}{r^2} drdz$$

dove B nel piano (r,z) è descritto da

$$0 \le z \le 1,\ 1 \le r \le z^2+1.$$

Quindi:

$$\pi \int_B \frac{-z}{r^2} drdz = -\pi \int_0^1 z \int_1^{z^2+1} \frac{1}{r^2} drdz =$$

$$\pi \int_0^1 z \left[\frac{1}{r}\right]_1^{z^2+1} dz = -\pi \int_0^1 \frac{z^3}{z^2+1} dz =$$

$$-\pi \int_0^1 \left(z - \frac{z}{z^2+1}\right) dz = -\frac{\pi}{2}\left[z^2 - \log(z^2+1)\right]_0^1 = -\frac{\pi}{2}(1-\log 2).$$

Soluzione 2.4.11 (Testo 1.4.11)

$$A = \{0 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)/2}\}, \quad f = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

In coordinate sferiche A corrisponde a

$$0 < r \leq 1, \ r\cos\varphi \geq r\frac{\sqrt{2}}{2}, \ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi$$

quindi a

$$0 < r \leq 1, \ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, \ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi$$

mentre

$$f = \frac{1}{r}.$$

Ne segue

$$\int_A f \ dxdydz = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\pi/4} \sin\varphi \ d\varphi \int_0^1 r \ dr =$$

$$2\pi[-\cos\varphi]_0^{\pi/4} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 = 2\pi \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = \pi \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Soluzione 2.4.12 (Testo 1.4.12)

$$A = \{0 \leq z \leq 1/2, 4z^2 \leq x^2 + y^2 \leq (z^2+1)^2\}, \quad f = \frac{1}{(z-1)^3(x^2+y^2)^{1/2}}.$$

In coordinate cilindriche, A corrisponde a

$$0 \leq z \leq 1/2, \ 4z^2 \leq r^2 \leq (z^2+1)^2, \ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi$$

quindi a

$$0 \leq z \leq 1/2, \ 2z \leq r \leq z^2 + 1, \ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi$$

mentre la funzione f diventa

$$f = \frac{1}{r(z-1)^3}.$$

Ne segue

$$\int_A f \; dxdydz = 2\pi \int_B \frac{1}{(z-1)^3} drdz$$

dove B nel piano (r, z) è descritto da

$$0 \le z \le 1/2, \; 2z \le r \le z^2 + 1.$$

Quindi:

$$2\pi \int_B \frac{1}{(z-1)^3} drdz = 2\pi \int_0^{1/2} \frac{1}{(z-1)^3} \int_{2z}^{z^2+1} drdz =$$

$$2\pi \int_0^{1/2} \frac{z^2 + 1 - 2z}{(z-1)^3} dz = 2\pi \int_0^{1/2} \frac{(z-1)^2}{(z-1)^3} dz =$$

$$2\pi \int_0^{1/2} \frac{1}{z-1} dz = 2\pi \left[\log|z-1|\right]_0^{1/2} =$$

$$2\pi \left[\log(1-z)\right]_0^{1/2} = 2\pi \log \frac{1}{2} = -2\pi \log 2.$$

Soluzione 2.4.13 (Testo 1.4.13)

$$A = \{0 < x^2 + y^2 + z^2 \le 1, \frac{2}{\sqrt{3}} z \ge \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\}, \quad f = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

In coordinate sferiche A corrisponde a

$$0 < r \le 1, \; \frac{2}{\sqrt{3}} r \cos\varphi \ge r, \; 0 \le \vartheta \le 2\pi$$

quindi a

$$0 < r \le 1, \; 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{6}, \; 0 \le \vartheta \le 2\pi$$

mentre

$$f = \frac{1}{r}.$$

Ne segue

$$\int_A f \; dxdydz = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\pi/6} \sin\varphi \; d\varphi \int_0^1 r \; dr =$$

$$2\pi[-\cos\varphi]_0^{\pi/6} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 = 2\pi \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = \pi \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Soluzione 2.4.14 (Testo 1.4.14)

$$A = \{0 \le z \le 1, x \ge 0, y \ge 0, z^2 \le x^2 + y^2 \le z\}, \quad f = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

In coordinate cilindriche, A corrisponde a

$$0 \le z \le 1,\ r\cos\vartheta \ge 0,\ r\sin\vartheta \ge 0,\ z^2 \le r^2 \le z$$

quindi a

$$0 \le z \le 1,\ 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2},\ z \le r \le \sqrt{z}$$

mentre la funzione f diventa

$$f = \frac{2r\cos\vartheta}{r} = 2\cos\vartheta.$$

Ne segue

$$\int_A f\ dxdydz = 2\int_0^{\pi/2} \cos\vartheta\ d\vartheta \int_B r\ drdz$$

dove B nel piano (r, z) è descritto da

$$0 \le z \le 1,\ z \le r \le \sqrt{z}.$$

Quindi:

$$2\int_0^{\pi/2} \cos\vartheta\ d\vartheta \int_B r\ drdz = 2[\sin\vartheta]_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_z^{\sqrt{z}} r\ drdz =$$

$$2\int_0^1 \int_z^{\sqrt{z}} r\ drdz = \int_0^1 [r^2]_z^{\sqrt{z}} dz = \int_0^1 (z - z^2) dz =$$

$$\left[\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Soluzione 2.4.15 (Testo 1.4.15)

$$A = \{0 < x^2 + y^2 + z^2 \le 1, \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \le 2z \le \sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)}\},$$

$$f = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

In coordinate sferiche A corrisponde a

$$0 < r \leq 1, \ r \leq 2r\cos\varphi \leq r\sqrt{3}, \ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi$$

quindi a

$$0 < r \leq 1, \ \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}, \ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi$$

mentre

$$f = \frac{1}{r}.$$

Ne segue

$$\int_A f \ dxdydz = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin\varphi \ d\varphi \int_0^1 r \ dr =$$

$$2\pi[-\cos\varphi]_{\pi/6}^{\pi/3} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 = 2\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = \pi\frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

Soluzione 2.4.16 (Testo 1.4.16)

$$A = \{0 < z \leq 1 - x^2 - y^2\}, \quad f = \frac{1}{2\sqrt{z}}.$$

In coordinate cilindriche, A corrisponde a

$$0 < z \leq 1 - r^2, \ 0 \leq r < 1, \ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi$$

quindi

$$\int_A f \ dxdydz = 2\pi \int_B \frac{r}{2\sqrt{z}} drdz$$

dove B nel piano (r, z) è descritto da

$$0 < z \leq 1 - r^2, \ 0 \leq r < 1.$$

Quindi:

$$2\pi \int_B \frac{r}{2\sqrt{z}} drdz = 2\pi \int_0^1 r \int_0^{1-r^2} \frac{1}{2\sqrt{z}} dzdr =$$

$$2\pi \int_0^1 r[\sqrt{z}]_0^{1-r^2} dr = 2\pi \int_0^1 r\sqrt{1-r^2} dr = -\pi[\sqrt{1-r^2}]_0^1 = \pi.$$

Soluzione 2.4.17 (Testo 1.4.17)

$$A = \{0 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \leq \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)/2}\}, \quad f = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

In coordinate sferiche A corrisponde a

$$0 < r \leq 1, \ r \cos\varphi \leq r\frac{\sqrt{2}}{2}, \ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi$$

quindi a

$$0 < r \leq 1, \ \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \pi, \ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi$$

mentre

$$f = \frac{1}{r}.$$

Ne segue

$$\int_A f \ dxdydz = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{\pi/4}^{\pi} \sin\varphi \ d\varphi \int_0^1 r \ dr =$$

$$2\pi[-\cos\varphi]_{\pi/4}^{\pi} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 = 2\pi \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = \pi\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

2.5 Soluzioni integrali curvilinei

Soluzione 2.5.1 (Testo 1.5.1)
Data la curva γ in $\mathbf{R}^3$ parametrizzata da

$$r(t) = (\cos t, \sin t, t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

determinare:
a) la retta tangente nel punto $r(\pi)$;
b) la sua lunghezza;
c) il baricentro geometrico;
d) il baricentro rispetto alla densità lineare $f(x, y, z) = |x|$;
e) l'integrale su γ, orientata in senso contrario a quello indotto dalla parametrizzazione data, del campo vettoriale $F(x, y, z) = (y, -x, x + z)$.

La curva in questione è un'elica cilindrica.

(a) Si ha

$$r'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$$

in particolare il vettore tangente nella posizione $r(\pi) = (-1, 0, 1)$ vale

$$r'(\pi) = (0, -1, 1).$$

La retta tangente ha quindi equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = -1 + t \cdot 0 \\ y = 0 + t \cdot (-1) \\ z = 1 + t \cdot 1 \end{cases}, \qquad t \in \mathbf{R},$$

cioè

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases}, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Per scrivere la retta in forma cartesiana come intersezione di due piani, basta eliminare dalle precedenti equazioni il parametro t. Ad esempio, dalla seconda equazione $t = -y$ e sostituendo nella terza si ha

$$\begin{cases} x = -1 \\ z = 1 - y \end{cases}.$$

(b) Da

$$\|r'(t)\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1} = \sqrt{2}$$

la lunghezza vale

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = 2\pi\sqrt{2}.$$

(c) Il baricentro geometrico $G = (x_G, y_G, z_G)$ ha coordinate

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{L} \displaystyle\int_\gamma x \; ds \\ y_G = \dfrac{1}{L} \displaystyle\int_\gamma y \; ds \\ z_G = \dfrac{1}{L} \displaystyle\int_\gamma z \; ds \end{cases}$$

quindi

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{2}} \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos t \cdot \sqrt{2} dt = \dfrac{1}{2\pi} [\sin t]_0^{2\pi} = 0, \\ \\ y_G = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{2}} \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin t \cdot \sqrt{2} dt = \dfrac{1}{2\pi} [-\cos t]_0^{2\pi} = 0, \\ \\ z_G = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{2}} \displaystyle\int_0^{2\pi} t \cdot \sqrt{2} dt = \dfrac{1}{4\pi} \left[t^2\right]_0^{2\pi} = \pi. \end{cases}$$

Il baricentro, come del resto era prevedibile per motivi di simmetria, è il punto

$$G = (0, 0, \pi).$$

(c) Calcoliamo

$$M = \int_\gamma |x| \; ds = \int_0^{2\pi} |\cos t| \sqrt{2} dt =$$

$$2\sqrt{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t \; dt = 2\sqrt{2} [\sin t]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4\sqrt{2}$$

dove si è usato il fatto che la funzione $|\cos t|$ è periodica di periodo π, quindi l'integrale su un intervallo lungo 2π vale due volte l'integrale su un qualunque intervallo lungo π. Si è scelto l'intervallo $[\pi/2, \pi/2]$ dove $|\cos t| = \cos t$.

Il baricentro rispetto alla densità lineare $|x|$, $H = (x_H, y_H, z_H)$, ha coordinate

$$\begin{cases} x_H = \dfrac{1}{M} \displaystyle\int_\gamma x|x| \; ds \\ \\ y_H = \dfrac{1}{M} \displaystyle\int_\gamma y|x| \; ds \\ \\ z_H = \dfrac{1}{M} \displaystyle\int_\gamma z|x| \; ds \end{cases} .$$

Quindi

$$x_H = \frac{1}{4\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} |\cos t|\cos t \cdot \sqrt{2}dt = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} |\cos t|\cos t\ dt =$$

$$\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} |\cos t|\cos t\ dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} |\cos t|\cos t\ dt =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\ dt - \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2 t\ dt = 0$$

dove si sono usate, nell'ordine, le seguenti proprietà:
la funzione $|\cos t|\cos t$ è periodica di periodo 2π quindi gli integrali fatti su intervalli di lunghezza 2π sono tutti uguali tra loro;
la funzione $|\cos t|\cos t$ è pari quindi l'integrale su $[-\pi, \pi]$ vale due volte l'integrale su $[0, \pi]$;
per simmetria assiale gli integrali su $[0, \pi/2]$ e su $[\pi/2, \pi]$ di $\cos^2 t$ sono uguali tra loro.

Poi

$$y_H = \frac{1}{4\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} |\cos t|\sin t \cdot \sqrt{2}dt = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} |\cos t|\sin t\ dt =$$

$$\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} |\cos t|\sin t\ dt = 0$$

dove abbiamo usato il fatto che la funzione $|\cos t|\sin t$ è periodica di periodo 2π e dispari.

$$z_H = \frac{1}{4\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} |\cos t|t \cdot \sqrt{2}dt = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} |\cos t|t\ dt =$$

$$\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} t\cos t\ dt - \frac{1}{4}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} t\cos t\ dt + \frac{1}{4}\int_{3\pi/2}^{2\pi} t\cos t\ dt =$$

$$\frac{1}{4}[t\sin t]_0^{\pi/2} - \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \sin t\ dt - \frac{1}{4}[t\sin t]_{\pi/2}^{3\pi/2} + \frac{1}{4}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sin t\ dt +$$

$$\frac{1}{4}[t\sin t]_{3\pi/2}^{2\pi} - \frac{1}{4}\int_{3\pi/2}^{2\pi} \sin t\ dt = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}[\cos t]_0^{\pi/2} + \frac{\pi}{2} +$$

$$\frac{1}{4}[-\cos t]_{\pi/2}^{3\pi/2} + \frac{3\pi}{8} + \frac{1}{4}[\cos t]_{3\pi/2}^{2\pi} = \pi.$$

Il baricentro coincide col baricentro geometrico in forza della simmetria della densità lineare considerata:

$$H = (0, 0, \pi).$$

(e) Integrando il prodotto scalare tra $F = (\sin t, -\cos t, t+\cos t)$ e $r'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$, tenendo conto anche dell'orientamento, tale integrale vale

$$-\int_0^{2\pi} \left(-\sin^2 t - \cos^2 t + t + \cos t\right) dt = \int_0^{2\pi} (1 - t - \cos t)\, dt =$$

$$[t - t^2/2 + \sin t]_0^{2\pi} = 2\pi(1 - \pi).$$

Soluzione 2.5.2 (Testo 1.5.2)
Determinare l' integrale di lavoro $\int_\gamma F \cdot dr$ del campo

$$F(x, y) = e^{\sin x}(y \cos x, 1) + (1, 1)$$

sulla curva orientata γ parametrizzata da $r(t) = (\cos(\pi t), t + t^2)$, $0 \leq t \leq 1$.

Da

$$\partial_y(e^{\sin x} y \cos x + 1) = e^{\sin x} \cos x = \partial_x(e^{\sin x} + 1)$$

il campo F è chiuso in $\mathbf{R}^2$ quindi è esatto su tutto il piano. Conviene determinare l'integrale come differenza di potenziale. Determiniamo i potenziali U integrando le componenti:

$$U = \int (e^{\sin x} + 1) dy = y e^{\sin x} + y + a(x).$$

Imponendo poi

$$\partial_x U = e^{\sin x} y \cos x + 1$$

abbiamo

$$e^{\sin x} y \cos x + a'(x) = e^{\sin x} y \cos x + 1$$

da cui

$$a'(x) = 1,$$

$$a(x) = x + c.$$

I potenziali sono dati da

$$U = ye^{\sin x} + y + x + c$$

e l'integrale richiesto vale

$$U(r(1)) - U(r(0)) = U(-1,2) - U(1,0) = 2e^{\sin(-1)}.$$

Soluzione 2.5.3 (Testo 1.5.3)
Sia F il campo vettoriale in $\mathbf{R}^3$

$$F(x,y,z) = \left(e^y + ze^x, xe^y + \frac{e^y}{z^2+1}, e^x - \frac{2ze^y}{(z^2+1)^2}\right).$$

a) Provare che F è chiuso in $\mathbf{R}^3$.
b) Determinare il lavoro di F sulla curva orientata parametrizzata da

$$r(t) = (t, t^2, 1), \quad 0 \le t \le 1.$$

(a)

$$\begin{cases} \partial_y(e^y + ze^x) = e^y = \partial_x\left(xe^y + \dfrac{e^y}{z^2+1}\right) \\[2ex] \partial_z(e^y + ze^x) = e^x = \partial_x\left(e^x - \dfrac{2ze^y}{(z^2+1)^2}\right) \\[2ex] \partial_z\left(xe^y + \dfrac{e^y}{z^2+1}\right) = -\dfrac{2ze^y}{(z^2+1)^2} = \partial_y\left(e^x - \dfrac{2ze^y}{(z^2+1)^2}\right) \end{cases}$$

quindi il campo è chiuso in $\mathbf{R}^3$.

(b) Visto che il campo è chiuso in $\mathbf{R}^3$, il campo è esatto in $\mathbf{R}^3$. Conviene determinare l'integrale come differenza di potenziale. Determiniamo i potenziali U integrando le componenti:

$$U = \int (e^y + ze^x)dx = xe^y + ze^x + a(y,z)$$

Imponendo poi

$$\partial_y U = xe^y + \frac{e^y}{z^2+1}$$

abbiamo

$$\partial_y a(y,z) = \frac{e^y}{z^2+1}$$

da cui
$$a(y,z) = \int \frac{e^y}{z^2+1} dy = \frac{e^y}{z^2+1} + b(z).$$
Attualmente i potenziali sono dati da
$$U = xe^y + ze^x + \frac{e^y}{z^2+1} + b(z).$$
Imponendo ora
$$\partial_z U = e^x - \frac{2ze^y}{(z^2+1)^2}$$
abbiamo
$$b'(z) = 0$$
quindi
$$b(z) = c,$$
$$U = xe^y + ze^x + \frac{e^y}{z^2+1} + c.$$

L'integrale richiesto vale
$$U(r(1)) - U(r(0)) = U(1,1,1) - U(0,0,1) = \frac{5e-3}{2}.$$

Soluzione 2.5.4 (Testo 1.5.4)
Sia F il campo vettoriale in $\mathbf{R}^3$
$$F(x,y,z) = \left(-y, x, z^2\right).$$
Determinare il lavoro di F sulla curva orientata definita da
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ y = x,\ x \geq 0$$
con punto iniziale $(0,0,1)$.

Il campo non è esatto perchè non è chiuso:
$$\partial_y(-y) \neq \partial_x(x).$$

Si deve determinare l'integrale usando la definizione, dopo aver trovato una parametrizzazione della curva (assegnata con equazioni cartesiane). In coordinate sferiche $r \geq 0$, $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, la curva corrisponde a

$$\begin{cases} r^2 = 1 \\ \\ r \sin\varphi \sin\vartheta = r \sin\varphi \cos\vartheta \\ \\ r \sin\varphi \cos\vartheta \geq 0 \end{cases}$$

quindi

$$\begin{cases} r = 1 \\ \\ \sin\vartheta = \cos\vartheta \\ \\ \cos\vartheta \geq 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} r = 1 \\ \\ \vartheta = \pi/4 \\ \\ 0 \leq \varphi \leq \pi. \end{cases}$$

Una parametrizzazione $r(\varphi) = (x(\varphi), y(\varphi), z(\varphi))$ della curva è

$$\begin{cases} x = (\sqrt{2}/2) \sin\varphi \\ \\ y = (\sqrt{2}/2) \sin\varphi \\ \\ z = \cos\varphi \\ \\ 0 \leq \varphi \leq \pi. \end{cases}$$

Ponendo $\varphi = 0$ si ottiene il punto $(0, 0, 1)$ quindi la parametrizzazione orienta la curva nel modo richiesto.

Abbiamo poi

$$\begin{cases} x' = (\sqrt{2}/2) \cos\varphi \\ \\ y' = (\sqrt{2}/2) \cos\varphi \\ \\ z' = -\sin\varphi \end{cases}$$

da cui, integrando il prodotto scalare tra $F(r(\varphi))$ ed $r'(\varphi)$, l'integrale richiesto vale

$$\int_0^\pi \Big(-(1/2)\sin\varphi\cos\varphi + (1/2)\sin\varphi\cos\varphi - \cos^2\varphi\sin\varphi\Big)\, d\varphi =$$

$$\int_0^\pi \Big(-\cos^2\varphi\sin\varphi\Big)\, d\varphi = \left[\frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_0^\pi = -\frac{2}{3}.$$

Soluzione 2.5.5 (Testo 1.5.5)
Dato il campo piano

$$F(x,y) = \left(\frac{3\log(1+y^2)}{2\sqrt{x}}, \frac{6y\sqrt{x}}{1+y^2}\right)$$

a) Provare che è esatto su tutto il dominio naturale determinando i potenziali.
b) Trovare il potenziale $U(x,y)$ che verifica $U(1,-1) = 0$.
c) Relativamente al potenziale determinato in b), esplicitare nella forma $y = y(x)$ la linea di potenziale nullo che passa dal punto $(1,-1)$

(a) Il campo è chiuso nel dominio naturale $x > 0$:

$$\partial_y\left(\frac{3\log(1+y^2)}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{3}{(1+y^2)\sqrt{x}} = \partial_x\left(\frac{6y\sqrt{x}}{1+y^2}\right)$$

quindi è esatto nel semipiano, insieme semplicemente connesso, $x > 0$.

Determiniamo i potenziali U integrando le componenti:

$$U = \int\left(\frac{3\log(1+y^2)}{2\sqrt{x}}\right) dx = 3\sqrt{x}\log(1+y^2) + a(y).$$

Imponendo poi

$$\partial_y U = \frac{6y\sqrt{x}}{1+y^2}$$

abbiamo

$$a'(y) = 0$$

quindi

$$a(y) = c.$$

I potenziali, definiti su tutto il dominio $x > 0$, sono dati da

$$U(x, y) = 3\sqrt{x}\log(1 + y^2) + c.$$

(b) Imponendo $U(1, -1) = 0$ si trova $c = -3\log 2$. Il potenziale richiesto è

$$U(x, y) = 3\sqrt{x}\log(1 + y^2) - 3\log 2.$$

(c) Si tratta di risolvere rispetto ad y l'equazione

$$3\sqrt{x}\log(1 + y^2) - 3\log 2 = 0$$

sotto la condizione $y(1) = -1$. Abbiamo

$$\log(1 + y^2) = \frac{\log 2}{\sqrt{x}}$$

$$1 + y^2 = e^{\frac{\log 2}{\sqrt{x}}}$$

$$y = \pm\sqrt{e^{\frac{\log 2}{\sqrt{x}}} - 1}.$$

Tenendo conto della condizione $y(1) = -1$, la soluzione è

$$y = -\sqrt{e^{\frac{\log 2}{\sqrt{x}}} - 1}.$$

• Nei seguenti cinque esercizi data la curva γ, contenuta nell'insieme $A \subset \mathbf{R}^3$, attraverso equazioni cartesiane, determinare equazioni parametriche e calcolare l'integrale su γ della funzione scalare f assegnata.

Soluzione 2.5.6 (Testo 1.5.6)

$$\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ \\ z = y \end{cases}, \quad \gamma \subset A = \{x \geq 0, y \geq 0\}, \quad f = -2xy.$$

In coordinate cilindriche $r \geq 0$, $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, $z \in \mathbf{R}$, la curva corrisponde a

$$\begin{cases} r^2 = 1 \\ \\ z = r\sin\vartheta \\ \\ r\cos\vartheta \geq 0, \ r\sin\vartheta \geq 0 \end{cases}$$

quindi

$$\begin{cases} r = 1 \\ \\ z = \sin\vartheta \\ \\ 0 \leq \vartheta \leq \pi/2. \end{cases}$$

Una parametrizzazione $r(\vartheta) = (x(\vartheta), y(\vartheta), z(\vartheta))$ della curva è

$$\begin{cases} x = \cos\vartheta \\ \\ y = \sin\vartheta \\ \\ z = \sin\vartheta \\ \\ 0 \leq \vartheta \leq \pi/2. \end{cases}$$

L'orientamento non è influente integrando funzioni scalari. Abbiamo poi

$$\begin{cases} x' = -\sin\vartheta \\ \\ y' = \cos\vartheta \\ \\ z' = \cos\vartheta \end{cases}$$

da cui

$$\|r'(\vartheta)\| = \sqrt{\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta + \cos^2\vartheta} = \sqrt{1+\cos^2\vartheta}.$$

L'integrale richiesto vale

$$\int_\gamma -2xy\ ds = \int_0^{\pi/2} -\cos\vartheta\sin\vartheta\sqrt{1+\cos^2\vartheta}d\vartheta =$$

$$\left[\frac{1}{3}(1+\cos^2\vartheta)^{3/2}\right]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

Soluzione 2.5.7 (Testo 1.5.7)

$$\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ \\ z = x + y \end{cases}, \quad \gamma \subset A = \{x \geq 0, 0 \leq y \leq x\}, \quad f = -2(x^2 - y^2).$$

In coordinate cilindriche $r \geq 0$, $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, $z \in \mathbf{R}$, la curva corrisponde a

$$\begin{cases} r^2 = 1 \\ z = r\cos\vartheta + r\sin\vartheta \\ r\cos\vartheta \geq 0, \ \ 0 \leq r\sin\vartheta \leq r\cos\vartheta \end{cases}$$

quindi

$$\begin{cases} r = 1 \\ z = \cos\vartheta + \sin\vartheta \\ 0 \leq \vartheta \leq \pi/4. \end{cases}$$

Una parametrizzazione $r(\vartheta) = (x(\vartheta), y(\vartheta), z(\vartheta))$ della curva è

$$\begin{cases} x = \cos\vartheta \\ y = \sin\vartheta \\ z = \cos\vartheta + \sin\vartheta \\ 0 \leq \vartheta \leq \pi/4. \end{cases}$$

L'orientamento non è influente integrando funzioni scalari. Abbiamo poi

$$\begin{cases} x' = -\sin\vartheta \\ y' = \cos\vartheta \\ z' = -\sin\vartheta + \cos\vartheta \end{cases}$$

da cui

$$\|r'(\vartheta)\| = \sqrt{\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta - 2\sin\vartheta\cos\vartheta} =$$

$$\sqrt{2 - 2\sin\vartheta\cos\vartheta}.$$

L'integrale richiesto vale

$$\int_\gamma -2(x^2 - y^2)ds = \int_0^{\pi/4} -2(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)\sqrt{2 - 2\sin\vartheta\cos\vartheta}d\vartheta =$$

$$\int_0^{\pi/4} -2\cos 2\vartheta\sqrt{2 - \sin 2\vartheta}d\vartheta = \left[\frac{2}{3}(2 - \sin 2\vartheta)^{3/2}\right]_0^{\pi/4} = -\frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1).$$

Soluzione 2.5.8 (Testo 1.5.8)

$$\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ \\ x^2 + y^2 = z \end{cases} , \quad \gamma \subset A = \{y \geq 0\}, \quad f = x + y.$$

In coordinate cilindriche $r \geq 0$, $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, $z \in \mathbf{R}$, la curva corrisponde a

$$\begin{cases} r^2 + z^2 = 2 \\ \\ z = r^2 \\ \\ 0 \leq r \sin \vartheta \end{cases}$$

quindi

$$\begin{cases} r = 1 \\ \\ z = 1 \\ \\ 0 \leq \vartheta \leq \pi. \end{cases}$$

Una parametrizzazione $r(\vartheta) = (x(\vartheta), y(\vartheta), z(\vartheta))$ della curva è

$$\begin{cases} x = \cos \vartheta \\ \\ y = \sin \vartheta \\ \\ z = 1 \\ \\ 0 \leq \vartheta \leq \pi. \end{cases}$$

L'orientamento non è influente integrando funzioni scalari. Abbiamo poi

$$\begin{cases} x' = -\sin \vartheta \\ \\ y' = \cos \vartheta \\ \\ z' = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\|r'(\vartheta)\| = \sqrt{\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta + 0^2} = 1$$

L'integrale richiesto vale

$$\int_\gamma (x+y)ds = \int_0^\pi (\cos\vartheta + \sin\vartheta)d\vartheta = [\sin\vartheta - \cos\vartheta]_0^\pi = 2.$$

Soluzione 2.5.9 (Testo 1.5.9)

$$\gamma : \begin{cases} y = x \\ \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}, \quad \gamma \subset A = \{0 \le x \le 1\}, \quad f = x + y.$$

Direttamente in coordinate cartesiane, una parametrizzazione $r(x) = (x, y(x), z(x))$ è data da

$$\begin{cases} x = x \\ \\ y = x \\ \\ z = 2x^2 \\ \\ 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

L'orientamento non è influente integrando funzioni scalari. Abbiamo poi

$$\begin{cases} x' = 1 \\ \\ y' = 1 \\ \\ z' = 4x \end{cases}$$

da cui

$$\|r'(x)\| = \sqrt{1+1+16x^2} = \sqrt{2+16x^2}.$$

L'integrale richiesto vale

$$\int_\gamma (x+y)ds = \int_0^1 2x\sqrt{2+16x^2} = \left[\frac{1}{24}(2+16x^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{1}{12}(27\sqrt{2} - 1).$$

Soluzione 2.5.10 (Testo 1.5.10)

$$\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ \\ x + y = 0 \end{cases}, \quad \gamma \subset A = \{y \geq 0, z \geq 0\}, \quad f = z.$$

In coordinate sferiche $r \geq 0$, $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, la curva corrisponde a

$$\begin{cases} r^2 = 4 \\ \\ r \sin\varphi \cos\vartheta + r \sin\varphi \sin\vartheta = 0 \\ \\ r \sin\varphi \sin\vartheta \geq 0, \ r \cos\varphi \geq 0 \end{cases}$$

quindi

$$\begin{cases} r = 2 \\ \\ \sin\vartheta = -\cos\vartheta \\ \\ \sin\vartheta \geq 0, \ \cos\varphi \geq 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} r = 2 \\ \\ \vartheta = 3\pi/4 \\ \\ 0 \leq \varphi \leq \pi/2. \end{cases}$$

Una parametrizzazione $r(\varphi) = (x(\varphi), y(\varphi), z(\varphi))$ della curva è

$$\begin{cases} x = -\sqrt{2} \sin\varphi \\ \\ y = \sqrt{2} \sin\varphi \\ \\ z = 2 \cos\varphi \\ \\ 0 \leq \varphi \leq \pi/2. \end{cases}$$

L'orientamento non è influente integrando funzioni scalari. Abbiamo poi

$$\begin{cases} x' = -\sqrt{2} \cos\varphi \\ \\ y' = \sqrt{2} \cos\varphi \\ \\ z' = -2 \sin\varphi \end{cases}$$

da cui

$$\|r'(\varphi)\| = \sqrt{2\cos^2\varphi + 2\cos^2\varphi + 4\sin^2\varphi} = 2.$$

L'integrale richiesto vale

$$\int_\gamma z\ ds = \int_0^{\pi/2} (2\cos\varphi) \cdot 2d\vartheta = [4\sin\vartheta]_0^{\pi/2} = 4.$$

• Nei seguenti sei esercizi dato il campo F nel suo dominio naturale, verificare che il campo è chiuso, dire se il dominio è stellato o, nel caso bidimensionale, semplicemente connesso. Trarre le conseguenze sulla esistenza di potenziali locali o globali. Determinare per i campi chiusi dei potenziali locali e verificare poi se si possono estendere all'intero dominio (ciò può accadere anche se il dominio non è stellato: questa condizione è sufficiente ma non necessaria!).

Soluzione 2.5.11 (Testo 1.5.11)

$$F(x,y) = \left(\frac{-1}{2\sqrt{y-x}} + ye^x, \frac{1}{2\sqrt{y-x}} + e^x + 2y\right).$$

Il campo, nel suo dominio naturale $y > x$, è chiuso:

$$\partial_y\left(\frac{-1}{2\sqrt{y-x}} + ye^x\right) = \frac{1}{4(y-x)^{3/2}} + e^x = \partial_x\left(\frac{1}{2\sqrt{y-x}} + e^x + 2y\right).$$

Il dominio è stellato (semipiano). Esistono sicuramente potenziali globali. Integrando le componenti, si trova

$$U = \int\left(\frac{-1}{2\sqrt{y-x}} + ye^x\right)dx = \sqrt{y-x} + ye^x + a(y).$$

Imponendo poi

$$\partial_y U = \frac{1}{2\sqrt{y-x}} + e^x + 2y$$

abbiamo

$$a'(y) = 2y$$

da cui

$$a(y) = y^2 + c.$$

I potenziali sono dati da

$$U = \sqrt{y-x} + ye^x + y^2 + c.$$

Soluzione 2.5.12 (Testo 1.5.12)

$$F(x,y) = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2-y}} + e^y + 2x, \frac{-1}{2\sqrt{x^2-y}} + xe^y \right).$$

Il campo, nel suo dominio naturale $y < x^2$, è chiuso:

$$\partial_y \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2-y}} + e^y + 2x \right) = -\frac{x}{2(x^2-y)^{3/2}} + e^y = \partial_x \left(\frac{-1}{2\sqrt{x^2-y}} + xe^y \right).$$

Il dominio non è stellato ma è semplicemente connesso. Il dominio soddisfa ancora una condizione sufficiente per l'esistenza di potenziali globali. Integrando le componenti, si trova

$$U = \int \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2-y}} + e^y + 2x \right) dx = \sqrt{x^2-y} + xe^y + x^2 + a(y).$$

Imponendo poi

$$\partial_y U = \frac{-1}{2\sqrt{x^2-y}} + xe^y$$

abbiamo

$$a'(y) = 0$$

da cui

$$a(y) = c.$$

I potenziali sono dati da

$$U = \sqrt{x^2-y} + xe^y + x^2 + c.$$

Soluzione 2.5.13 (Testo 1.5.13)

$$F(x,y) = \left(\frac{1}{x+y} + 2x, \frac{1}{x+y} + \frac{2y}{y^2+1} \right).$$

Il campo, nel suo dominio naturale $x + y \neq 0$, è chiuso:

$$\partial_y \left(\frac{1}{x+y} + 2x \right) = -\frac{1}{(x+y)^2} = \partial_x \left(\frac{1}{x+y} + \frac{2y}{y^2+1} \right).$$

Il dominio non è connesso (unione di due semipiani disgiunti), però ciascuna delle componenti connesse (ciascuno dei due semipiani) è stellata. Esistono potenziali globali, i potenziali differiscono tra di loro per due costanti, tra loro indipendenti, una su ciascun semipiano. Integrando le componenti, si trova

$$U = \int \left(\frac{1}{x+y} + 2x \right) dx = \log|x+y| + x^2 + a(y).$$

Imponendo poi

$$\partial_y U = \frac{1}{x+y} + \frac{2y}{y^2+1}$$

abbiamo

$$a'(y) = \frac{2y}{y^2+1}$$

da cui

$$a(y) = \log(y^2+1) + c.$$

I potenziali sono dati da

$$U = \begin{cases} \log(x+y) + x^2 + \log(y^2+1) + c_1, & x+y > 0, \\ \\ \log(-x-y) + x^2 + \log(y^2+1) + c_2, & x+y < 0. \end{cases}$$

Soluzione 2.5.14 (Testo 1.5.14)

$$F(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2} + 2x, \frac{2y}{x^2+y^2} + 1 \right).$$

Il campo, nel suo dominio naturale $(x,y) \neq (0,0)$, è chiuso:

$$\partial_y \left(\frac{2x}{x^2+y^2} + 2x \right) = -\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2} = \partial_x \left(\frac{2y}{x^2+y^2} + 1 \right).$$

Il dominio non è semplicemente connesso. Esistono certamente dei potenziali locali, non è detto a priori che si possano estendere a tutto il dominio. Integrando le componenti, si trova

$$U = \int \left(\frac{2x}{x^2+y^2} + 2x \right) dx = \log(x^2+y^2) + x^2 + a(y).$$

Imponendo poi

$$\partial_y U = \frac{2y}{x^2+y^2} + 1$$

abbiamo
$$a'(y) = 1$$
da cui
$$a(y) = y + c.$$
I potenziali sono dati da
$$U = \log(x^2 + y^2) + x^2 + y + c$$
e risultano definiti su tutto il dominio. Il campo è esatto su $\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$, ha potenziali globali benchè il dominio non sia semplicemente connesso.

Soluzione 2.5.15 (Testo 1.5.15)

$F(x, y, z) =$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + 2yz, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + y^2 + \frac{1}{z^2 + 1} \right).$$

Il campo, nel suo dominio naturale $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, è chiuso:

$$\partial_y \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \partial_x \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + 2yz \right);$$

$$\partial_z \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = -\frac{2xz}{(x^2 + y^2)^2} =$$
$$\partial_x \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + y^2 + \frac{1}{z^2 + 1} \right);$$

$$\partial_z \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + 2yz \right) = -\frac{2yz}{(x^2 + y^2)^2} + 2y =$$
$$\partial_y \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + y^2 + \frac{1}{z^2 + 1} \right).$$

Il dominio non è stellato in $\mathbf{R}^3$. Esistono certamente dei potenziali locali, non è detto a priori che si possano estendere a tutto il dominio. Integrando le componenti, si trova
$$U = \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + a(y, z).$$

Imponendo poi

$$\partial_y U = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + 2yz$$

abbiamo

$$\partial_y a(y,z) = 2yz$$

da cui

$$a(y,z) = y^2 z + b(z),$$

$$U = \sqrt{x^2+y^2+z^2} + y^2 z + b(z).$$

Imponendo infine

$$\partial_z U = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + y^2 + \frac{1}{z^2+1}$$

abbiamo

$$b'(z) = \frac{1}{z^2+1}$$

da cui

$$b(z) = \arctan z + c$$

I potenziali sono dati da

$$U = \sqrt{x^2+y^2+z^2} + y^2 z + \arctan z + c$$

e risultano definiti su tutto il dominio. Il campo è esatto su $\mathbf{R}^3 - \{(0,0,0)\}$, ha potenziali globali benchè il dominio non sia stellato.

Soluzione 2.5.16 (Testo 1.5.16)

$$\left(\frac{-z}{x^2+z^2}, 2y, \frac{x}{x^2+z^2}\right)$$

Il campo, nel suo dominio naturale $\mathbf{R}^3 - \{x = z = 0\}$ (lo spazio privato dell'asse y), è chiuso:

$$\partial_y \left(\frac{-z}{x^2+z^2}\right) = 0 = \partial_x (2y)\,;$$

$$\partial_z \left(\frac{-z}{x^2+z^2}\right) = -\frac{x^2-z^2}{(x^2+z^2)^2} = \partial_x \left(\frac{x}{x^2+z^2}\right);$$

$$\partial_z (2y) = 0 = \partial_y \left(\frac{x}{x^2+z^2}\right).$$

Il dominio non è stellato in $\mathbf{R}^3$. Esistono certamente dei potenziali locali, non è detto a priori che si possano estendere a tutto il dominio. Integrando le componenti, si trova

$$U = \int \frac{-z}{x^2+z^2}dx = -\arctan(x/z) + a(y,z), \quad z \neq 0.$$

Imponendo poi

$$\partial_y U = 2y$$

abbiamo

$$\partial_y a(y,z) = 2y$$

da cui

$$a(y,z) = y^2 + b(z),$$

$$U = -\arctan(x/z) + y^2 + b(z), \quad z \neq 0.$$

Imponendo infine

$$\partial_z U = \frac{x}{x^2+z^2}$$

abbiamo

$$b'(z) = 0$$

da cui

$$b(z) = c.$$

I potenziali, nella regione definita da $z \neq 0$, sono dati da

$$U = -\arctan(x/z) + y^2 + c.$$

Analogamente, partendo ad esempio dall'integrare la terza componente in dz, si trova che nella regione del dominio definita da $x \neq 0$, i potenziali sono definiti da

$$U = \arctan(z/x) + y^2 + c, \quad x \neq 0.$$

Questi potenziali non si possono estendere a tutto il dominio, infatti integrando sulla circonferenza

$$x = \cos t, y = 0, z = \sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

curva chiusa contenuta nel dominio, il risultato non è nullo:

$$\int_0^{2\pi} (-\sin t \cdot (-\sin t) + 0 \cdot 0 + \cos t \cdot \cos t))\, dt = \int_0^{2\pi} 1 \; dt = 2\pi.$$

2.6 Soluzioni compiti

Soluzione 2.6.1 (Testo 1.6.1)

Esercizio A
• Determinare l'insieme di convergenza in $\mathbf{R}$ della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n+1} t^n, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

(Solo il risultato, **1.5 pt**).

$$[-1/3, 1/3)$$

• Determinare il dominio naturale D della funzione di variabile reale

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n+1} \left(\frac{x}{|x-1|} \right)^n$$

(Solo il risultato, **3 pt**).

$$[-1/2, 1/4)$$

• la funzione $f(x)$ è continua per $x = -1/2$? Motivare la risposta (**1.5 pt**).

La funzione risulta continua per $x = -1/2$ perchè $f(x) = g(h(x))$ con $h(x) = x/|x-1|$ continua in $x = -1/2$ e $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n+1} t^n$ continua in $h(-1/2) = -1/3$ per il Lemma di Abel.

Esercizio B
Sia $f : A \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$,

$$A = \{(x, y, z) |\ 4x^2 + 4y^2 - z^2 \leq 0, -4 \leq z \leq 0\}, \quad f(x, y, z) = x + y^2 + z.$$

Determinare i seguenti elementi.

• Eventuali punti di massimo o minimo interni al dominio A (motivare la risposta, **0.5 pt**).

Non ci sono punti critici interni: il gradiente di f è diverso da zero in ogni punto.

• Eventuali punti di frontiera dove il teorema dei moltiplicatori di Lagrange non si puo' applicare (solo il risultato, **0.5 pt**).

$$(0,0,0)$$

(vertice del cono).

• Le tre regioni di frontiera V_1, V_2, V_3 in cui il teorema dei moltiplicatori di Lagrange si applica (scrivere le equazioni e le disequazioni che definiscono le regioni, **1 pt**).

$$V_1 = \{4x^2 + 4y^2 - z^2 = 0, -4 < z < 0\},$$

$$V_2 = \{z + 4 = 0, x^2 + y^2 < 4\},$$

$$V_3 = \{x^2 + y^2 - 4 = 0, z + 4 = 0\}.$$

• I tre corrispondenti sistemi da risolvere (scrivere le equazioni dei sistemi di Lagrange, **1 pt**).

$$V_1 : \begin{cases} 1 + 8\lambda x = 0 \\ 2y + 8\lambda y = 0 \\ 1 - 2\lambda z = 0 \\ 4x^2 + 4y^2 - z^2 = 0 \end{cases} \qquad (-4 < z < 0)$$

$$V_2 : \begin{cases} 1 + \lambda \cdot 0 = 0 \\ 2y + \lambda \cdot 0 = 0 \\ 1 + \lambda = 0 \\ z + 4 = 0 \end{cases} \qquad (x^2 + y^2 < 4)$$

$$V_3 : \begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0 \\ 2y + 2\lambda y = 0 \\ 1 + \mu = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \\ z + 4 = 0 \end{cases}$$

• I tre corrispondenti insiemi di punti che si ottengono (scrivere gli insiemi delle soluzioni dei tre sistemi precedenti, **2 pt**)

$$V_1 : \ (1/2, \sqrt{3}/2, -2), \ (1/2, -\sqrt{3}/2, -2)$$

$$V_2 : \ \emptyset$$

$$V_3 : \ (2, 0, -4), \ (-2, 0, -4), \ (1/2, \sqrt{15}/2, -4), \ (1/2, -\sqrt{15}/2, -4)$$

A questi si aggiunge il punto singolare $(0, 0, 0)$.

• Perchè l'insieme dei valori $f(A)$ è un intervallo limitato e chiuso? (**0.5 pt**)

A è compatto e connesso, f è continua.

• Scrivere $f(A)$. (**0.5 pt**)

$$[-6, 1/4]$$

Esercizio C
Determinare la soluzione di

$$y' = \frac{y^2 + 2y}{x}, \ y(-1) = 2$$

specificandone il dominio. (Svolgimento completo con i passaggi significativi **6 pt**).

Risolviamo col metodo della separazione delle variabili. È possibile applicare anche il metodo di Bernoulli. Per separare le variabili si osserva che $y^2 + 2y \neq 0$ per x in un intorno di $x = -1$.

$$\int \frac{dy}{y^2+2y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}\log\left|\frac{y}{y+2}\right| = \log|x| + c$$

$$\log\left|\frac{y}{y+2}\right| = 2\log|x| - \log(2)$$

$$\frac{y}{y+2} = \frac{x^2}{2}$$

$$y = \frac{2x^2}{2-x^2}, \quad -\sqrt{2} < x < 0.$$

Per determinare il dominio si osserva che dal testo deve essere $x \neq 0$. Poi deve risultare $x^2 \neq 2$. Infine il dominio è il più grande intervallo dove queste condizioni sono soddisfatte e che contiene il valore iniziale $x = -1$.

Esercizio D
Dato l'integrale

$$\int_A \frac{y}{(z-1)^2(x^2+y^2)} dxdydz, \quad A = \{0 \le z < 1, y \ge 0, 4z^2 \le x^2+y^2 \le (z^2+1)^2\}$$

passare a coordinate cilindriche.

• Si ottiene (**1 pt**):

$$\int_0^\pi \sin\theta \left(\int_B \frac{1}{(z-1)^2} d\varrho dz\right) d\theta,$$

$$B = \{(\varrho, z); \varrho \ge 0, 0 \le z < 1, 2z \le \varrho \le z^2+1\}.$$

• Riportare da questo punto i passaggi significativi fino ad arrivare al risultato finale (**4 pt**):

$$[-\cos\theta]_0^\pi \int_0^1 \frac{1}{(z-1)^2}\left(\int_{2z}^{z^2+1} d\varrho\right) dz =$$

$$2\int_0^1 \frac{1}{(z-1)^2}(z^2+1-2z)dz =$$

$$2\int_0^1 dz =$$

$$2$$

Esercizio E
Data la curva γ di equazioni cartesiane

$$\gamma : \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=x \end{cases} \quad , \quad \gamma \subset A = \{x \geq 0, y \geq 0\}$$

- Scrivere una parametrizzazione (solo il risultato, **2 pt**).

$$\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \quad , \qquad 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ z=\cos\theta \end{cases}$$

- Calcolare $\int_\gamma 2xyds$ (riportare i passaggi significativi, **3 pt**)

$$\int_0^{\pi/2} 2\cos\theta\sin\theta\sqrt{(-\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2+(-\sin\theta)^2}d\theta =$$

$$\int_0^{\pi/2} 2\cos\theta\sin\theta\sqrt{1+\sin^2\theta}d\theta =$$

$$\tfrac{2}{3}[(1+\sin^2\theta)^{3/2}]_0^{\pi/2} =$$

$$\tfrac{2}{3}(2^{3/2}-1)$$

Esercizio E
Dimostrare che l'integrale lungo una curva regolare orientata di un campo esatto vale la differenza di potenziale agli estremi. (**5 pt**)

Per questo quesito consultare il testo Lezioni di Analisi Matematica B.

Soluzione 2.6.2 (Testo 1.6.2)

Esercizio A
• Determinare l'insieme di convergenza in **R** della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^n}{2^n+1} t^n, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

(Solo il risultato, **2 pt**).

Il raggio di convergenza vale $2/3$. Per $|t| = 2/3$ la serie non converge in quanto il termine generale non va a 0. Risposta:

$$(-2/3, 2/3).$$

• Determinare il dominio naturale D della funzione di variabile reale

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^n}{2^n+1} \left(\frac{x}{x-1} \right)^n.$$

(Solo il risultato, **2 pt**).

Risolvendo il sistema di disequazioni $-2/3 < x/(x-1) < 2/3$ si ottiene $-2 < x < 2/5$. Risposta:

$$(-2, 2/5).$$

• Determinare $f'(0)$ motivando la risposta. (**2 pt**)

Abbiamo una funzione derivabile infinite volte nel proprio dominio e le derivate si ottengono derivando sotto il segno di sommatoria. Quindi

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 3^n}{2^n+1} \left(\frac{x}{x-1} \right)^{n-1} \cdot \frac{-1}{(x-1)^2}.$$

Per $x = 0$ questa ultima serie si riduce ad un solo termine, quello per $n = 1$:

$$f'(0) = -1.$$

Esercizio B
Sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$,
$$f(x,y) = x^3(x^2 + y^2 - 2y).$$

Nello studio dei punti di minimo/massimo locali, determinare i seguenti elementi:

• Punti critici. (Solo risultato, **2 pt**)

$$(\sqrt{3/5}, 1),\ (-\sqrt{3/5}, 1),\ (0, y),\ y \in \mathbf{R}.$$

• Classificazione dei punti critici dove la matrice hessiana consente di concludere. Per ciascuno di questi punti, riportare la corrispondente matrice hessiana e motivare conseguentemente la classificazione del punto (**2 pt**)

$$H(\sqrt{3/5}, 1) = \begin{pmatrix} 6\sqrt{3/5} & 0 \\ 0 & (6/5)\sqrt{3/5} \end{pmatrix}$$

definita positiva: punto di minimo locale.

$$H(-\sqrt{3/5}, 1) = \begin{pmatrix} -6\sqrt{3/5} & 0 \\ 0 & -(6/5)\sqrt{3/5} \end{pmatrix}$$

definita negativa: punto di massimo locale.

$H(0, y)$ è la matrice nulla: non si ottiene alcuna classificazione tramite H.

• Nei rimanenti punti critici la funzione vale 0. Riportare su un grafico i segni dei valori di f e trarre conclusioni motivate sulla natura di questi punti. (**2 pt**)

Il fattore x^3 ha il segno di x: positivo nel semipiano $x > 0$, negativo nel semipiano $x < 0$. Il fattore $x^2 + y^2 - 2y$ è negativo all'interno del cerchio di centro $(0, 1)$ e raggio 1, positivo all'esterno. Il grafico richiesto si costruisce applicando la regola dei segni. In ogni intorno di un qualunque punto $(0, y)$ la funzione f assume sia valori positivi che negativi. Poichè in tali punti vale 0, si tratta di tutti punti di sella.

Esercizio C
Data l'equazione
$$y'' - 4y' + 4y = e^{-2x} + e^{2x}$$

determinare i seguenti elementi.

• Integrale generale della equazione omogenea corrispondente. (Solo il risultato, **1 pt**)

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{2x}.$$

• Un integrale particolare riportando tutti i passaggi significativi. (**3 pt**)

Applichiamo il metodo per simpatia lasciando il metodo della variazione delle costanti al lettore.

$$u = ae^{-2x} + bx^2 e^{2x}$$

$$u' = -2ae^{-2x} + b(2x + 2x^2)e^{2x}$$

$$u'' = 4ae^{-2x} + b(2 + 8x + 4x^2)e^{2x}.$$

Imponendo che u sia soluzione si trova $a = 1/16, b = 1/2$.

$$u = e^{-2x}/16 + x^2 e^{2x}/2$$

• Integrale generale della equazione completa. (Solo il risultato, **1 pt**)

$$y = (c_1 + c_2 x + x^2/2)e^{2x} + e^{-2x}/16.$$

• Soluzione con dati iniziali $y(0) = y'(0) = 0$ (Solo il risultato, **1 pt**)

$$y = (-1/16 + x/4 + x^2/2)e^{2x} + e^{-2x}/16.$$

Esercizio D

Calcolare, riportando i passaggi significativi, $\displaystyle\int_A \frac{e^{z^2}}{(x^2+y^2)^{1/4}} dxdydz$ con $A = \{(x^2 + y^2)^{3/4} \le z \le 1\}$. (**5 pt**).

Passando a coordinate cilindriche si ottiene

$$2\pi \int_B e^{z^2} \varrho^{1/2} d\varrho dz,$$

$$B = \{0 < \varrho, \varrho^{3/2} \le z \le 1\} = \{0 < z \le 1, 0 < \varrho \le z^{2/3}\}.$$

Questi due modi di rappresentare B corrispondono alle due possibili formule di riduzione. Per poter usare funzioni elementari, in questo esercizio si deve integrare prima in $d\varrho$ poi in dz:

$$2\pi \int_0^1 e^{z^2} \left(\int_0^{z^{2/3}} \varrho^{1/2} d\varrho \right) dz =$$

$$\frac{4\pi}{3} \int_0^1 e^{z^2} [\varrho^{3/2}]_0^{z^{2/3}} dz =$$

$$\frac{4\pi}{3} \int_0^1 z e^{z^2} dz =$$

$$\frac{2\pi}{3} [e^{z^2}]_0^1 =$$

$$\frac{2\pi}{3} (e-1).$$

Esercizio E
Dato il campo vettoriale piano

$$F(x,y) = \left(\frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}, \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \right)$$

determinare i seguenti elementi.

• Il dominio naturale A specificando se è semplicemente connesso (solo il risultato, **1 pt**).

$$A = \mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$$

A non è semplicemente connesso.

• Il campo F è chiuso in A? Indicare le derivate delle componenti che servono per rispondere (solo il risultato, **1 pt**).

$F = (f_1, f_2)$ è chiuso in A:

$$\partial_y f_1 = \frac{6x^2 y - 2y^3}{(x^2+y^2)^3} = \partial_x f_2.$$

• Il campo F è esatto in A? In caso affermativo, indicare i potenziali (solo il risultato, **2 pt**).

Il campo F è esatto in A. Integrando le componenti si trovano potenziali globali:

$$U = \frac{x}{x^2+y^2} + c.$$

• Il lavoro di F sul segmento orientato di punto iniziale $(0,1)$ e punto finale $(1,0)$ (solo il risultato, **1 pt**).

$$U(1,0) - U(0,1) = 1.$$

Esercizio F
Dare la definizione di differenziabilità di una funzione di due variabili $f(x,y)$ in un punto (x_0, y_0) interno al dominio. Dare l'interpretazione geometrica. Enunciare le relazioni con la continuità e derivabilità di f in (x_0, y_0). (**5 pt**)

Per questo quesito si veda il testo Lezioni di Analisi Matematica B.

Soluzione 2.6.3 (Testo 1.6.3)

Esercizio A
• Sia $f : A \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$,

$$A = \{(x,y,z) |\ y^2 + z^2 \leq x, x + y \leq 2\}, \quad f(x,y,z) = (x-1)^2/2 + y^2 + z^2.$$

Determinare i seguenti elementi inserendo le risposte nelle rispettive caselle.

• Punti critici interni al dominio A (**0.5 pt**).

$$(1,0,0).$$

Dal momento che $f(x,y,z) \geq 0$ e $f(1,0,0) = 0$, si tratta di un evidente punto di minimo assoluto.

• Le tre regioni di frontiera V_1, V_2, V_3 in cui si applica il teorema dei moltiplicatori di Lagrange (scrivere le equazioni e le disequazioni che definiscono le regioni, **1.5 pt**).

$$V_1 : \ \{x - y^2 - z^2 = 0, x + y < 2\},$$

$$V_2 : \ \{x + y = 2, x - y^2 - z^2 > 0\},$$

$$V_3 : \ \{x - y^2 - z^2 = 0, x + y = 2\}.$$

• I tre corrispondenti sistemi da risolvere (scrivere le equazioni dei sistemi di Lagrange, **1.5 pt**).

$$V_1: \begin{cases} x-1=\lambda \\ 2y=-2\lambda y \\ 2z=-2\lambda z \\ x-y^2-z^2=0 \\ (x+y<2) \end{cases}$$

$$V_2: \begin{cases} x-1=\lambda \\ 2y=\lambda \\ 2z=0 \\ x+y=2 \\ (x-y^2-z^2>0) \end{cases}$$

$$V_3: \begin{cases} x-1=\lambda+\mu \\ 2y=-2\lambda y+\mu \\ 2z=-2\lambda z \\ x-y^2-z^2=0 \\ x+y=2 \end{cases}$$

• I tre corrispondenti insiemi di punti che si ottengono (scrivere gli insiemi delle soluzioni dei tre sistemi precedenti, **3 pt**).

$$V_1: \ (0,0,0),$$

$$V_2: \ (5/3,1/3,0),$$

$$V_3: \ (1,1,0), \ (4,-2,0).$$

• Perchè l'insieme dei valori $f(A)$ è un intervallo limitato e chiuso? (**0.5 pt**)

L' insieme A è limitato, chiuso, connesso. La funzione f è continua. Si applicano i Teoremi di Bolzano e Weierstrass.

• Scrivere $f(A)$. (**0.5 pt**)

Minimo $f(1,0,0)=0$. Massimo $f(4,-2,0)=17/2$.

$$f(A)=[0,17/2].$$

Esercizio B

Data l'equazione

$$y''-2y'+y=e^x+x$$

determinare i seguenti elementi.

• Integrale generale della equazione omogenea corrispondente. (Solo il risultato, **1 pt**).

$$y = (c_1 + c_2 x)e^x.$$

• Un integrale particolare riportando tutti i passaggi significativi. (**3 pt**)

$$u = ax^2e^x + bx + c$$

$$u' = ae^x(2x + x^2) + b$$

$$u'' = ae^x(2 + 4x + x^2)$$

$$u'' - 2u' + u = e^x + x \iff a = 1/2, b = 1, c = 2,$$

$$u = (x^2/2)e^x + x + 2.$$

• Integrale generale della equazione completa. (Solo il risultato, **1 pt**).

$$y = (c_1 + c_2 x + x^2/2)e^x + x + 2$$

• Soluzione con dati iniziali $y(0) = 2, y'(0) = 1$ (Solo il risultato, **2 pt**).

$$y = (x^2/2)e^x + x + 2.$$

Esercizio C
Calcolare, riportando i passaggi significativi, $\displaystyle\int_A \frac{ze^{z^2}}{2 - z - z^2}dxdydz$ con $A = \{0 \le z \le (x^2 + y^2)^{1/2}, z \le 2 - x^2 - y^2, z \le \sqrt{\log 2}\}$. (**7 pt**).

$$2\pi \int_0^{\sqrt{\log 2}} \frac{ze^{z^2}}{2-z-z^2} \int_z^{\sqrt{2-z}} \varrho d\varrho dz =$$

$$\pi \int_0^{\sqrt{\log 2}} \frac{ze^{z^2}}{2-z-z^2} [\varrho^2]_z^{\sqrt{2-z}} dz =$$

$$\pi \int_0^{\sqrt{\log 2}} ze^{z^2} dz =$$

$$(\pi/2)[e^{z^2}]_0^{\sqrt{\log 2}} =$$

$$\pi/2.$$

Esercizio D
Dato il campo vettoriale $F(x,y) = (e^y \cos(xe^y), (1/2\sqrt{y}) + xe^y \cos(xe^y))$ determinare i seguenti elementi.

• Il dominio naturale A specificando se è semplicemente connesso (solo il risultato, **1 pt**).

$A = \{y > 0\}$. Ogni semipiano è semplicemente connesso.

• Dire se il campo F è chiuso in A indicando le derivate delle componenti che servono per rispondere (solo il risultato, **1 pt**).

$$\partial_y(e^y \cos(xe^y)) = e^y \cos(xe^y) - xe^{2y} \sin(xe^y)$$

$$\partial_x((1/2\sqrt{y}) + xe^y \cos(xe^y)) = e^y \cos(xe^y) - xe^{2y} \sin(xe^y)$$

Il campo F è chiuso in A.

• Si può prevedere a questo punto se il campo F è esatto in A o meno? Dopo aver risposto, se ne esistono, indicare i potenziali assieme ai passaggi significativi per ottenerli (**2.5 pt**).

Il campo F è chiuso in A semplicemente connesso: F è esatto in A.

$$U(x,y) = \int e^y \cos(xe^y)dy = \sin(xe^y) + h(y)$$

$$\partial_y U(x,y) = (1/2\sqrt{y}) + xe^y \cos(xe^y) \iff h'(y) = 1/2\sqrt{y}$$

$$h(y) = \sqrt{y} + c$$

$$U(x,y) = \sin(xe^y) + \sqrt{y} + c.$$

• Il lavoro di F sulla curva orientata parametrizzata da

$$r(t) = ((1/2)\cos t, 1 - (1/2)\sin t), 0 \leq t \leq 2\pi.$$

(risultato e motivazione, **1 pt**)

Si tratta di una curva regolare chiusa (circonferenza percorsa in senso orario). Il campo è esatto, quindi l' integrale vale 0.

Esercizio E
Dopo aver dato la definizione di differenziabilità in un punto interno al domino di una funzione da $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}$, discuterne le relazioni con la continuità e la derivabilità nello stesso punto (**3 pt**).

Per questo quesito si veda il testo Lezioni di Analisi Matematica B.

Soluzione 2.6.4 (Testo 1.6.4)

Esercizio A
• Sia $f : A \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$,

$$A = \{(x,y,z)|\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ x + y \leq 0\}, \quad f(x,y,z) = (x-3)^2 + y^2 + z^2.$$

Determinare i seguenti elementi.

• Eventuali punti critici interni al dominio A (**0.5 pt**).

Il gradiente di f si annulla solo in $(3,0,0)$ che non appartiene ad A. Nessun punto critico interno.

• Le tre regioni di frontiera V_1, V_2, V_3 in cui si applica il teorema dei moltiplicatori di Lagrange (scrivere le equazioni e le disequazioni che definiscono le regioni, **1.5 pt**).

$$V_1: \ \{x^2+y^2+z^2=4, \ x+y<0\},$$

$$V_2: \ \{x+y=0, \ x^2+y^2+z^2<4\},$$

$$V_3: \ \{x^2+y^2+z^2=4, \ x+y=0\}.$$

• I tre corrispondenti sistemi da risolvere (scrivere le equazioni dei sistemi di Lagrange, **1.5 pt**).

$$V_1: \begin{cases} 2(x-3)=2\lambda x \\ 2y=2\lambda y \\ 2z=2\lambda z \\ x^2+y^2+z^2=4 \\ x+y<0 \end{cases}$$

$$V_2: \begin{cases} 2(x-3)=\lambda \\ 2y=\lambda \\ 2z=0 \\ x+y=0 \\ x^2+y^2+z^2<4 \end{cases}$$

$$V_3: \begin{cases} 2(x-3)=2\lambda x+\mu \\ 2y=2\lambda y+\mu \\ 2z=2\lambda z \\ x^2+y^2+z^2=4 \\ x+y=0 \end{cases}$$

• I tre corrispondenti insiemi di punti che si ottengono (scrivere gli insiemi delle soluzioni dei tre sistemi precedenti, **3 pt**).

$$V_1: \ (-2,0,0)$$

Il punto $(2,0,0)$ verifica le equazioni ma non $x+y<0$.

$$V_2: \ \emptyset$$

Il punto $(3/2,-3/2,0)$ verifica le equazioni ma non $x^2+y^2+z^2<4$.

$$V_3: \ (\sqrt{2},-\sqrt{2},0), \ (-\sqrt{2},\sqrt{2},0).$$

• Scrivere $f(A)$. (**0.5 pt**)

$$[13 - 6\sqrt{2}, 25].$$

Esercizio B
Data l'equazione

$$y' = x(y^3 - y)$$

determinare i seguenti elementi.

• Le eventuali soluzioni costanti. (**1 pt**)

$$y = 0,\ y = 1,\ y = -1.$$

• Tutte le soluzioni definite per ogni $x \in \mathbf{R}$, riportando tutti i passaggi significativi. (**6 pt**)

$$\int \frac{1}{y(y-1)(y+1)} dy = \int x dx$$

$$\int \left(-\frac{1}{y} + \frac{1}{2}\frac{1}{y-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{y+1} \right) dy = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\log \frac{|y^2 - 1|}{y^2} = x^2 + c$$

(scrivendo ancora c per $2c$)

$$\frac{|y^2 - 1|}{y^2} = ke^{x^2},\ k > 0$$

(scrivendo $k > 0$ per e^c)

$$\frac{y^2 - 1}{y^2} = ke^{x^2},\ k \neq 0$$

(togliendo il valore assoluto k può anche essere negativo)

$$y^2 = \frac{1}{1 - ke^{x^2}}$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{1 - ke^{x^2}}}, \quad 1 - ke^{x^2} > 0.$$

La condizione $1 - ke^{x^2} > 0$ è soddisfatta da ogni $x \in \mathbf{R}$ se e solo se $k < 0$.

• Soluzione con dati iniziali $y(0) = \sqrt{1/2}$ (solo il risultato, **1 pt**).

$$y = \sqrt{\frac{1}{1+e^{x^2}}}\ , \quad x \in \mathbf{R}.$$

Esercizio C
Calcolare, riportando i passaggi significativi, $\displaystyle\int_A \frac{1}{(z-1)^3(x^2+y^2)^{1/2}}dxdydz$ con
$A = \{0 \le z \le 1/2, 4z^2 \le x^2+y^2 \le (z^2+1)^2\}$. (**6 pt**).

$$2\pi \int_0^{1/2} \frac{1}{(z-1)^3} \int_{2z}^{z^2+1} \frac{1}{\varrho}\varrho d\varrho dz =$$

$$2\pi \int_0^{1/2} \frac{1}{(z-1)^3} [\varrho]_{2z}^{z^2+1} dz =$$

$$2\pi \int_0^{1/2} \frac{1}{(z-1)} dz =$$

$$2\pi [\log|z-1|]_0^{1/2} = -2\pi \log 2.$$

Esercizio D
Dato il campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2} + 2x, \frac{2y}{x^2+y^2} + 1\right)$$

determinare i seguenti elementi.

• Il dominio naturale A specificando se è semplicemente connesso (solo il risultato, **1 pt**).

$$A = \mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}.$$

Non è semplicemente connesso.

• Dire se il campo F è chiuso in A indicando le derivate delle componenti che servono per rispondere (solo il risultato, **1 pt**).

$$F = (f_1, f_2)$$

$$\partial_y f_1 = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2} = \partial_x f_2$$

Il campo è chiuso in A.

• Trovare, se ne esistono, tutti i potenziali indicando i passaggi significativi per ottenerli (**3 pt**).

Il campo è chiuso quindi esistono potenziali locali; A non è semplicemente connesso quindi non si può affermare a priori che F abbia potenziali in A. U potenziale locale:

$$U(x,y) = \int f_1(x,y)dx = \log(x^2+y^2) + x^2 + h(y)$$

$$\partial_y U = f_2 \Longleftrightarrow h'(y) = 1 \Longleftrightarrow h(y) = y + c$$

$$U(x,y) = \log(x^2+y^2) + x^2 + y + c.$$

Dal momento che i potenziali sono definiti su tutto A,F è esatto in A.

• Il lavoro di F sulla curva orientata parametrizzata da

$$r(t) = ((3/2)\cos t, 1 - (3/2)\sin t), 0 \le t \le 2\pi.$$

(risultato e motivazione, **1 pt**)

Il campo è esatto e la curva è chiusa (circonferenza). L' integrale vale zero.

Esercizio E (**6 pt**)
Dare la definizione di integrale di una funzione scalare continua f su una curva regolare non orientata γ. Provare che la definizione è ben data in quanto non dipende dalla parametrizzazione di γ. Definire infine il baricentro geometrico di γ.

Per questo quesito si veda il testo Lezioni di Analisi Matematica B.

Soluzione 2.6.5 (Testo 1.6.5)

Esercizio A
• Sia $f : A \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$,

$$A = \{(x,y,z)|\ x^2+y^2+z \le 4, x+y \le 0\}, \quad f(x,y,z) = (x-1)^2 + y^2 + 2z.$$

Determinare i seguenti elementi inserendo le risposte nelle rispettive caselle.

• Eventuali punti critici interni al dominio A (**0.5 pt**).

Il gradiente di f non si annulla in alcun punto. Nessun punto critico.

• Le tre regioni di frontiera V_1, V_2, V_3 in cui si applica il teorema dei moltiplicatori di Lagrange (scrivere le equazioni e le disequazioni che definiscono le regioni, **1.5 pt**).

$$V_1 : \ \{x^2 + y^2 + z = 4, \ x + y < 0\},$$

$$V_2 : \ \{x + y = 0, \ x^2 + y^2 + z < 4\},$$

$$V_3 : \ \{x^2 + y^2 + z = 4, \ x + y = 0\}.$$

• I tre corrispondenti sistemi da risolvere (scrivere le equazioni dei sistemi di Lagrange, **1.5 pt**).

$$V_1 : \begin{cases} 2(x-1) = 2\lambda x \\ 2y = 2\lambda y \\ 2 = \lambda \\ x^2 + y^2 + z = 4 \\ x + y < 0 \end{cases}$$

$$V_2 : \begin{cases} 2(x-1) = \lambda \\ 2y = \lambda \\ 2 = \lambda \cdot 0 \\ x + y = 0 \\ x^2 + y^2 + z < 4 \end{cases}$$

$$V_3 : \begin{cases} 2(x-1) = 2\lambda x + \mu \\ 2y = 2\lambda y + \mu \\ 2 = \lambda \\ x^2 + y^2 + z = 4 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

• I tre corrispondenti insiemi di punti che si ottengono (scrivere gli insiemi delle soluzioni dei tre sistemi precedenti, **3 pt**).

$$V_1 : \ (-1, 0, 3)$$

$$V_2 : \ \emptyset$$

$$V_3 : \ (-1/2, 1/2, 7/2)$$

• Scrivere $f(A)$. (**0.5 pt**)

$$[19/2, 10].$$

Esercizio B
Data l'equazione

$$y' = \frac{y(y-2)}{x(x-4)}$$

determinare i seguenti elementi.

• Le eventuali soluzioni costanti. (**1 pt**)

$$y = 0, \; y = 2.$$

• Tutte le soluzioni con $x \in (0, 4)$ e $y \in (0, 2)$, riportando tutti i passaggi significativi. (**6 pt**)

$$\int \frac{1}{y(y-2)} dy = \int \frac{1}{x(x-4)} dx$$

$$\int \left(-\frac{1}{2y} + \frac{1}{2(y-2)} \right) dy = \int \left(-\frac{1}{4x} + \frac{1}{4(x-4)} \right) dx$$

$$\log \frac{(y-2)^2}{y^2} = \log \frac{4-x}{x} + c$$

$$\frac{(y-2)^2}{y^2} = k \frac{4-x}{x}, \; k > 0$$

(scrivendo $k > 0$ per e^c)

$$\frac{2-y}{y} = k\sqrt{\frac{4-x}{x}}, \; k > 0$$

(scrivendo ancora k per $\sqrt{k}$)

$$y = \frac{2}{1 + k\sqrt{\frac{4-x}{x}}}, \; k > 0, \; x \in (0, 4).$$

• Soluzione con dati iniziali $y(2) = 1$ (solo il risultato, **1 pt**).

$$y = \frac{2}{1+\sqrt{\frac{4-x}{x}}}, \; x \in (0,4).$$

Esercizio C
Calcolare, riportando i passaggi significativi, $\int_A \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dxdydz$ con $A = \{0 < x^2+y^2+z^2 \le 1, \sqrt{x^2+y^2+z^2} \le 2z \le \sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}\}$. (**6 pt**).

In coordinate sferiche:

$$0 < \varrho \le 1, \; \varrho \le 2\varrho\cos\phi \le \varrho\sqrt{3}, \; 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$0 < \varrho \le 1, \; 1/2 \le \cos\phi \le \sqrt{3}/2, \; 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$0 < \varrho \le 1, \; \pi/6 \le \phi \le \pi/3, \; 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$2\pi \int_0^1 \frac{1}{\varrho}\varrho^2 \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin\phi d\phi d\varrho =$$

$$2\pi \int_0^1 \varrho[-\cos\phi]_{\pi/6}^{\pi/3} d\varrho =$$

$$(\sqrt{3}-1)\pi \textstyle\int_0^1 \varrho d\varrho =$$

$$(\sqrt{3}-1)\pi[\varrho^2/2]_0^1 = (\sqrt{3}-1)\pi/2.$$

Esercizio D
Data la curva non orientata $\gamma \subset \mathbf{R}^3$ definita in maniera cartesiana da

$$\gamma : \begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ \\ z = x+y \end{cases}, \quad \gamma \subset \{x \ge 0, 0 \le y \le x\},$$

determinare i seguenti elementi.

• Una parametrizzazione (solo il risultato, **3 pt**).

$$\begin{cases} x = \cos\theta \\ \\ y = \sin\theta & \qquad \theta \in (0,\pi/4) \\ \\ z = \cos\theta + \sin\theta \end{cases}$$

• L'integrale $\int_\gamma (x^2 - y^2) ds$ indicando i passaggi significativi per ottenerlo (**3 pt**).

$$\int_0^{\pi/4} (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\sqrt{(-\sin\theta)^2 + \cos^2\theta + (-\sin\theta + \cos\theta)^2}d\theta =$$

$$\int_0^{\pi/4} (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\sqrt{2 - 2\cos\theta\sin\theta}d\theta =$$

$$\int_0^{\pi/4} \cos(2\theta)\sqrt{2 - \sin(2\theta)}d\theta =$$

$$(-1/3)[(2 - \sin(2\theta))^{3/2}]_0^{\pi/4} = (2\sqrt{2} - 1)/3.$$

Esercizio E (**6 pt**)
Dare la definizione di integrale di un campo vettoriale continuo F su una curva regolare orientata γ. Provare che la definizione è ben data in quanto non dipende dalla parametrizzazione di γ. Provare infine che se F è esatto l'integrale nopn dipende da γ ma solo dai suoi estremi.

Per questo quesito si veda il testo Lezioni di Analisi Matematica B.

Soluzione 2.6.6 (Testo 1.6.6)

Esercizio A
• Sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$,

$$f(x, y) = y^3(x^2 + y^2 - 4x + 3).$$

Nello studio dei punti di minimo/massimo locali, determinare i seguenti elementi.

• Punti critici. (Solo risultato, **2 pt**).

$$(2, \sqrt{3/5}),\ (2, -\sqrt{3/5}),\ (x, 0),\ x \in \mathbf{R}.$$

• Classificazione dei punti critici dove la matrice hessiana consente di concludere. Per ciascuno di questi punti, riportare la corrispondente matrice hessiana e motivare conseguentemente la classificazione del punto (**3 pt**)

$$H(2, \sqrt{3/5}) = \begin{pmatrix} (6/5)\sqrt{3/5} & 0 \\ 0 & 6\sqrt{3/5} \end{pmatrix}$$

definita positiva: punto di minimo locale.

$$H(2, -\sqrt{3/5}) = \begin{pmatrix} -(6/5)\sqrt{3/5} & 0 \\ 0 & -6\sqrt{3/5} \end{pmatrix}$$

definita negativa: punto di massimo locale.

$H(x, 0)$ è la matrice nulla: non si può ottenere alcuna classificazione tramite H.

• Nei rimanenti punti critici la funzione vale 0. Riportare su un grafico i segni dei valori di f e trarre conclusioni motivate sulla natura di questi punti. (**2 pt**)

Il fattore y^3 ha il segno di y: positivo nel semipiano $y > 0$, negativo nel semipiano $y < 0$. Il fattore $x^2 + y^2 - 4x + 3$ è negativo all'interno del cerchio di centro $(2, 0)$ e raggio 1, positivo all'esterno. Il grafico richiesto si costruisce applicando la regola dei segni. In ogni intorno di un qualunque punto $(x, 0)$ la funzione f assume sia valori positivi che negativi. Poichè in tali punti vale 0, si tratta di tutti punti di sella.

Esercizio B

Data l'equazione

$$x'' - 2x' + x = 1 + e^t$$

determinare i seguenti elementi.

• Integrale generale della equazione omogenea corrispondente. (Solo il risultato, **1 pt**)

$$x = (c_1 + c_2 t)e^t.$$

• Un integrale particolare riportando tutti i passaggi significativi. (**3 pt**)

Applichiamo il metodo per simpatia lasciando il metodo della variazione delle costanti al lettore.

$$u = a + bt^2 e^t$$

$$u' = b(2t + t^2)e^t$$

$$u'' = b(2 + 4t + t^2)e^t.$$

Imponendo che u sia soluzione si trova $a = 1, b = 1/2$:

$$u = 1 + t^2 e^t/2.$$

• Integrale generale della equazione completa. (Solo il risultato, **1 pt**).

$$x = 1 + (c_1 + c_2 t + t^2/2)e^t.$$

• Soluzione con dati iniziali $y(0) = 1, y'(0) = 0$ (Solo il risultato, **2 pt**).

$$x = 1 + t^2 e^t/2.$$

Esercizio C
Calcolare, riportando i passaggi significativi, $\displaystyle\int_A (z-2)e^{x^2+y^2}\,dxdydz$ con $A = \{x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2+y^2}\}$. (**7 pt**).

Passando a coordinate cilindriche si ottiene

$$2\pi \int_B (z-2)\varrho e^{\varrho^2} d\varrho dz,$$

$$B = \{0 \leq \varrho \leq 1, 0 \leq z \leq 2 - \varrho\} =$$

$$\{0 \leq z \leq 1, 0 \leq \varrho \leq 1\} \cup \{1 \leq z \leq 2, 0 \leq \varrho \leq 2 - z\}.$$

Questi due modi di rappresentare B corrispondono alle due possibili formule di riduzione. Ad esempio, integrando prima in $d\varrho$ poi in dz:

$$2\pi \int_0^1 (z-2)\left(\int_0^1 \varrho e^{\varrho^2} d\varrho\right) dz + 2\pi \int_1^2 (z-2)\left(\int_0^{2-z} \varrho e^{\varrho^2} d\varrho\right) dz =$$

$$\pi \int_0^1 (z-2)\left[e^{\varrho^2}\right]_0^1 dz + \pi \int_1^2 (z-2)\left[e^{\varrho^2}\right]_0^{2-z} dz =$$

$$\pi \int_0^1 (z-2)(e-1)dz + \pi \int_1^2 (z-2)\left(e^{(z-2)^2} - 1\right) dz =$$

$$\pi(e-1)\left[\frac{(z-2)^2}{2}\right]_0^1 + \pi\left[\frac{e^{(z-2)^2}}{2}\right]_1^2 - \pi\left[\frac{(z-2)^2}{2}\right]_1^2 =$$

$$-\pi\left(2e - \frac{5}{2}\right).$$

Esercizio D
Data la curva di equazioni cartesiane

$$\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ \\ x + y = 0 \end{cases} , \quad \gamma \subset A = \{y \geq 0, z \geq 0\},$$

orientata in maniera tale che $(0, 0, 2)$ sia il suo punto iniziale, determinare gli elementi seguenti:

• Una parametrizzazione di γ (Solo il risultato, **2 pt**.)

$$\begin{cases} x = -\sqrt{2} \sin \varphi \\ \\ y = \sqrt{2} \sin \varphi \qquad\qquad 0 \leq \varphi \leq \pi/2 \\ \\ z = 2 \cos \varphi \end{cases}$$

• L'integrale su γ (non orientata) della funzione scalare $f(x, y, z) = z$ riportando i passaggi principali **(2 pt)**.

$$\int_0^{\pi/2} 2 \cos \varphi \sqrt{(-\sqrt{2} \cos \varphi)^2 + (\sqrt{2} \cos \varphi)^2 + (-2 \sin \varphi)^2} d\varphi =$$

$$\int_0^{\pi/2} 2 \cos \varphi \sqrt{4 \cos^2 \varphi + 4 \sin^2 \varphi} d\varphi =$$

$$4 \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \; d\varphi =$$

$$4[\sin \varphi]_0^{\pi/2} =$$

$$4.$$

• L'integrale su γ, orientata, del campo vettoriale $F(x, y.z) = (-z, z, 2x)$ riportando i passaggi principali **(2 pt)**.

$$\int_0^{\pi/2} \Big((-2\cos\varphi)(-\sqrt{2}\cos\varphi) + (2\cos\varphi)(\sqrt{2}\cos\varphi) + (-2\sqrt{2}\sin\varphi)(-2\sin\varphi)\Big)\, d\varphi =$$

$$\int_0^{\pi/2} \Big(4\sqrt{2}\cos^2\varphi + 4\sqrt{2}\sin^2\varphi\Big)\, d\varphi =$$

$$4\sqrt{2}\int_0^{\pi/2} d\varphi =$$

$$2\pi\sqrt{2}.$$

• Si può calcolare l'integrale di lavoro al punto precedente come differenza di potenziale? Motivare la risposta **(1 pt)**.

$$\partial_z(-z) \neq \partial_x(2x).$$

Il campo non è chiuso quindi non ammette potenziali.

Esercizio E
Enunciare e dimostrare il criterio del confronto ed il suo corollario di confronto asintotico per serie a termini positivi **(5 pt)**.

Per questo quesito si veda il testo Lezioni di Analisi Matematica B.

Soluzione 2.6.7 (Testo 1.6.7)

Esercizio A
• Sia $f : A \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$,

$$A = \{(x,y,z)|\ x^2+z^2 \leq y, x+y \leq 2\}, \quad f(x,y,z) = x^2 + \frac{(y-1)^2}{2} + z^2.$$

Determinare i seguenti elementi.

• Punti critici interni al dominio A (**0.5 pt**).

$$(0,1,0)$$

Dal momento che $f(x,y,z) \geq 0$ e $f(0,1,0) = 0$, si tratta di un evidente punto di minimo assoluto.

• Le tre regioni di frontiera V_1, V_2, V_3 in cui si applica il teorema dei moltiplicatori di Lagrange (scrivere le equazioni e le disequazioni che definiscono le regioni, **1.5 pt**).

$$V_1: \ \{x^2 - y + z^2 = 0, x + y < 2\},$$

$$V_2: \ \{x + y = 2, x^2 - y + z^2 < 0\},$$

$$V_3: \ \{x^2 - y + z^2 = 0, x + y = 2\}.$$

• I tre corrispondenti sistemi da risolvere (scrivere le equazioni dei sistemi di Lagrange, **1.5 pt**)

$$V_1: \begin{cases} 2x = 2\lambda x \\ y - 1 = -\lambda \\ 2z = 2\lambda z \\ x^2 - y + z^2 = 0 \\ (x + y < 2) \end{cases}$$

$$V_2: \begin{cases} 2x = \lambda \\ y - 1 = \lambda \\ 2z = 0 \\ x + y = 2 \\ (x^2 - y + z^2 < 0) \end{cases}$$

$$V_3: \begin{cases} 2x = 2\lambda x + \mu \\ y - 1 = -\lambda y + \mu \\ 2z = 2\lambda z \\ x^2 - y + z^2 = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

• I tre corrispondenti insiemi di punti che si ottengono (scrivere gli insiemi delle soluzioni dei tre sistemi precedenti, **3 pt**)

$$V_1: \ (0, 0, 0)$$

$$V_2: \ (1/3, 5/3, 0)$$

$$V_3: \ (1, 1, 0), \ (-2, 4, 0)$$

• Scrivere $f(A)$. (**0.5 pt**)

Minimo $f(1,0,0) = 0$. Massimo $f(-2,4,0) = 17/2$. A è limitato, chiuso, connesso:

$$f(A) = [0, 17/2].$$

Esercizio B

Risolvere

$$y' = \frac{3(y^2+1)}{xy}, \ y(-1) = -2$$

specificando il dominio della soluzione e riportando tutti i passaggi significativi. (**7 pt**)

Equazione a variabili separabili

$$\int \frac{y}{y^2+1} dy = \int \frac{3}{x} dx$$

$$\frac{1}{2}\log(y^2+1) = 3\log|x| + c$$

$$\log(y^2+1) = 6\log|x| + c.$$

Imponendo la condizione iniziale $\log 5 = c$:

$$\log(y^2+1) = \log(5x^6)$$

$$y^2 = 5x^6 - 1.$$

Tenendo conto dei dati iniziali l'unica soluzione è

$$y = -\sqrt{5x^6 - 1}.$$

Il dominio è il più grande intervallo contenente il valore iniziale $x = -1$ dove $y(x)$ risulta derivabile con derivata continua:

$$(-\infty, -(1/5)^{1/6}).$$

Esercizio C

Calcolare, riportando i passaggi significativi,

$$\int_A \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dxdydz, \ \ A = \{0 < x^2+y^2+z^2 \le 4, 0 \le z \le \sqrt{x^2+y^2}, 1 \le x^2+y^2\}$$

(**7 pt**).

In coordinate sferiche:

$$2\pi \int_B \cos\varphi \sin\varphi \; d\varrho d\varphi,$$

$$B = \{\pi/4 \le \varphi \le \pi/2, 1/\sin\varphi \le \varrho \le 2\}.$$

$$2\pi \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos\varphi \sin\varphi \int_{1/\sin\varphi}^{2} d\varrho \; d\varphi =$$

$$2\pi \int_{\pi/4}^{\pi/2} (2 - (1/\sin\varphi)) \cos\varphi \sin\varphi \; d\varphi =$$

$$4\pi \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos\varphi \sin\varphi \; d\varphi - 2\pi \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos\varphi \; d\varphi =$$

$$(2 \sin\varphi \cos\varphi = \sin(2\varphi))$$

$$\pi \left[-\cos(2\varphi)\right]_{\pi/4}^{\pi/2} - 2\pi \left[\sin\varphi\right]_{\pi/4}^{\pi/2} =$$

$$\pi(1-0) - 2\pi(1 - \sqrt{2}/2) =$$

$$\pi(\sqrt{2} - 1).$$

Esercizio D

Data la curva di equazioni cartesiane

$$\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ \\ x = y \end{cases}, \quad \gamma \subset A = \{y \ge 0, z \ge 0\},$$

orientata in maniera tale che $(0,0,2)$ sia il punto iniziale e $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ il punto finale, determinare gli elementi seguenti:

- Una parametrizzazione di γ (solo il risultato, **2 pt**).

$$\begin{cases} x = \sqrt{2} \sin\varphi \\ \\ y = \sqrt{2} \sin\varphi \qquad 0 \le \varphi \le \pi/2 \\ \\ z = 2\cos\varphi \end{cases}$$

• L'integrale su γ, orientata, del campo vettoriale

$$F(x,y.z) = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}\left(y^2+z^2-x^2, -2xy, -2xz\right)$$

usando la definizione, non usando potenziali, e riportando i passaggi principali. (**2.5 pt**)

$$\frac{1}{16}\int_0^{\pi/2}\left(4\sqrt{2}\cos^3\varphi - 4\sqrt{2}\sin^2\varphi\cos\varphi + 8\sqrt{2}\sin^2\varphi\cos\varphi\right)d\varphi =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^{\pi/2}\left(\cos^3\varphi + \sin^2\varphi\cos\varphi\right)d\varphi =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)d\varphi =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\; d\varphi =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4}[\sin\varphi]_0^{\pi/2} =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

• Indicare i potenziali del campo F precedente (solo il risultato, **2.5 pt**)

$$U = \frac{x}{x^2+y^2+z^2} + c.$$

Si noti che $U(\sqrt{2},\sqrt{2},0) - U(0,0,2) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Esercizio E

Dimostrare che se la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge in w allora converge in tutti gli z tali che $|z| < |w|$. (**5 pt**)

Per questo quesito si veda il testo Lezioni di Analisi Matematica B.